21世纪高职高专规划教材——公共基础课系列

高等应用数学

尹江艳 王莹 主编

清华大学出版社

21世纪高职高专规划教材——公共基础课系列

高等应用数学

尹江艳　王　莹　主　编
王丽丽　任路平　郭宝宇　杨　斌　副主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

全书共分为 5 章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分和定积分及其应用。本书每节均配有明确的学习任务(包括知识目标、能力目标、学习重点、学习难点)、基础训练、能力提高训练，并尽可能地增加一些应用型题目，书后还附有参考答案。本书在内容编排上力求做到深入浅出，通俗易懂，直观精练，注重技能，突出实用性、应用性和工具性等特点。

本书可作为高职高专院校各专业高等数学课程的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/尹江艳，王莹主编. --北京：清华大学出版社，2015

21 世纪高职高专规划教材. 公共基础课系列

ISBN 978-7-302-40937-3

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①尹…　②王…　Ⅲ. ①应用数学—高等职业教育—教材　Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 166191 号

责任编辑：刘翰鹏
封面设计：
责任校对：袁　芳
责任印制：

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：
装 订 者：
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：9　　**字　　数**：204 千字
版　　次：2015 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 8 月第1 次印刷
印　　数：1～　　00
定　　价：　　.00 元

产品编号：065606-01

前　言

FOREWORD

随着高职高专教育教学改革的不断深入发展，高等职业院校的教材改革也势在必行。为了适应新的职业教育人才培养的要求，提升高等职业技术人才的综合职业能力和职业素养，力求学生在有限的时间里掌握必备的基础理论知识、具体运算方法以及解决实际问题的应用能力，本着公共基础课为专业课服务的原则，编者通过深入细致的调查研究以及总结多年来对高等数学的教学经验，编写了这本《高等应用数学》。

本书以"高职高专教育高等数学课程教学基本要求"和"高职高专教育专业人才培养目标及规划"为依据，以"应用"为目的，以"必需、够用"为度的原则，既考虑到人才培养的应用性，又使学生具有一定的可持续发展能力。可供高职高专院校作为教材使用。

全书共分为 5 章。内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用。本书每节后配有实践模块，每章后配有综合实训，书后附有参考答案，教师可根据本校的实际特点及情况进行选择。建议学时数为54～64。具体学时分配如下：

章　节	学时分配	机动
第 1 章　函数、极限与连续	12	2
第 2 章　导数与微分	10	2
第 3 章　导数的应用	8	2
第 4 章　不定积分	12	2
第 5 章　定积分及其应用	12	2
总学时	64 学时	

本书由尹江艳、王莹老师担任主编，王丽丽、任路平、郭宝宇、杨斌老师担任副主编，参加编写的还有刘颖、徐莹、李占林、张丹、李靓等老师，在此表示衷心的感谢！

本书是针对高职高专高等数学教学改革的大胆尝试，由于编者水平有限，书中有不妥之处，敬请广大读者和同行批评、指正。

编　者

2015 年 4 月

目　录

CONTENTS

第 1 章

函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象,极限是微积分最重要的基本概念之一。微积分的许多概念都是用极限表述的,一些重要的性质和运算法则也是通过极限的方法推导出来的。因此,掌握极限的概念、性质和运算方法是学好微积分学的前提和基础。

知识模块 1.1　函数

学习任务

【知识目标】

(1) 理解函数的概念。

(2) 掌握 6 种基本初等函数及性质。

(3) 理解复合函数和初等函数的概念。

【能力目标】

(1) 掌握基本初等函数的性质及其图形。

(2) 能建立简单实际问题中的函数关系式。

【学习重点】

函数的概念、性质;基本初等函数的性质及其图形;复合函数的概念。

【学习难点】

复合函数的概念。

1.1.1　函数的概念

引例 1-1　【汽车租赁】一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金 200 元加每公里收费 15 元,租用一辆该种汽车一天,行车 x 公里的租车费为

$$y = 200 + 15x(\text{元})$$

其中,x 的取值范围是数集 $D=\{x|x\geqslant 0\}$,对于每一个 $x\in D$,按照此对应关系,都有唯一确定的 y 与之相对应。

定义 1-1　设 x,y 是两个变量,D 是给定的一个数集,若对于 D 中的每一个 x 值,根据某一对应关系 f,变量 y 都有唯一确定的数值与它相对应,那么,我们就称变量 y 是变量 x 在数集 D 上的函数,记作

$$y = f(x),\quad x \in D$$

式中，x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的变化范围 D 称为函数 $y=f(x)$的定义域。

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$。当自变量 x 取遍 D 中的一切数值时，与它相对应的所有 y 值的集合 M 称为函数 $y=f(x)$的值域。

从函数的定义可知，函数的定义域和对应关系称为**函数的两个要素**。

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定。如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数表达式有意义的所有实数的集合作为该函数的定义域。

【例 1-1】 求 $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域。

解：要使函数有意义，应满足$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\x+2\geqslant 0\end{cases}$，所以函数的定义域为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$。

函数 y 与自变量 x 的对应规律，大多可用一个解析式表示。但有时会遇到一个函数在自变量的不同取值范围内用不同的解析式表示，这种函数被称为分段函数。

1.1.2 基本初等函数

6 种基本初等函数见表 1-1。

表 1-1 基本初等函数表

函　数	解析表达式
常函数	$y=C$（C 为常数）
幂函数	$y=x^a$（a 为常数）
指数函数	$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，a 为常数）
对数函数	$y=\log_a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，a 为常数）
三角函数	$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$
反三角函数	$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$

1.1.3 复合函数

定义 1-2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$的值域全部或部分包含在函数 $f(u)$的定义域内，则由函数 $y=f(u)$和函数 $u=\varphi(x)$构成的函数称为函数 y 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 是自变量，u 是中间变量。

【例 1-2】 设 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=x^2+1$，求 $f[\varphi(x)]$。

解：$f[\varphi(x)]=\sqrt{u}=\sqrt{x^2+1}$

【例 1-3】 求下列函数的复合过程。

(1) $y=\arcsin(\ln x)$　　(2) $y=\sqrt[3]{\arctan\cos 2^{2x}}$

解：(1) 函数 $y=\arcsin(\ln x)$是由 $y=\arcsin u$，$u=\ln x$ 复合而成。

(2) 函数 $y=\sqrt[3]{\arctan\cos 2^{2x}}$是由 $y=\sqrt[3]{u}$，$u=\arctan v$，$v=\cos w$，$w=2^m$，$m=2x$ 复合

而成。

注意：

(1) 复合函数可以由两个或两个以上的函数复合而成。

(2) 不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数。例如，$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 就不能复合成一个函数，为什么？思考一下。

1.1.4 初等函数

定义 1-3 由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成，并能用一个数学式子表示的函数称为初等函数。

例如，函数 $y=1+\sqrt{x}$，$y=x\ln x$，$y=e^{\sin 3x}$ 等都是初等函数。

注意：分段函数不一定是初等函数。例如，分段函数 $y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 1+x, & x<0\end{cases}$ 就不是初等函数，而分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 却是初等函数，为什么？请思考。

应用模块 1.1

应用 1 【销售利润】某商店将每件进价为 180 元的西服按每件 280 元销售时，每天只卖出 10 件。若每件售价降低 m 元，当 $m=20x(x\in N)$ 时，其日销售量就增加 $15x$ 件。试写出日利润 y 与 x 的函数关系。

解：日利润＝每件利润×日销售量，而每件利润＝现价－进价＝$(280-20x)-180$，日销售量为 $10+15x$，所以总利润 $y=(280-20x-180)(10+15x)=100(5-x)(2+3x)$。又由题意知，降价数只能是 20 元的整数倍，所以该函数的定义域为 N。因此，日利润 y 与 x 的函数关系为 $y=100(5-x)(2+3x)(x\in N)$。

应用 2 【货运方案】某工厂在甲、乙两地的两个分厂各生产某种机床 12 台和 6 台。现销售给 A 地 10 台，B 地 8 台。已知从甲地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 400 元和 800 元，从乙地调运 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 300 元和 500 元。

(1) 设从乙地调运 x 台至 A 地，求总运费 y 关于 x 的函数关系式。

(2) 若总运费不超过 9000 元，问共有几种调运方案？

分析：甲、乙两地调运至 A、B 两地的机床台数及运费如表 1-2 所示。

表 1-2　调运机床台数及运费

调出地	调至地	台　数	每台费用(元)	运费合计(元)
甲地	A 地	$10-x$	400	$400(10-x)$
	B 地	$12-(10-x)$	800	$800[12-(10-x)]$
乙地	A 地	x	300	$300x$
	B 地	$6-x$	500	$500(6-x)$

解：(1) 依题意得

$0\leqslant x\leqslant 6, x\in Z, y=400(10-x)+800[12-(10-x)]+300x+500(6-x)$，
即 $y=200(x+43)(0\leqslant x\leqslant 6, x\in Z)$。

(2) 由 $y\leqslant 9000$，解得 $x\leqslant 2$。

由于 $x\in Z, 0\leqslant x\leqslant 6$，所以 $x=0,1,2$。

因此，共有3种调运方案。

应用3 【邮件资费】我国2004年1月1日起执行的国内投寄外埠平信的邮件资费为：首重100g内，每重20g(不足20g按20g计算)付邮资0.80元，续重101～2000g每重100g(不足100g按100g计算)付邮资2.00元。那么投寄重 xg$(0<x\leqslant 120)$的外埠平信应付多少邮资？

解：设投寄外埠平信邮资为 y，则

$$y=\begin{cases}0.80, & 0<x\leqslant 20\\ 1.60, & 20<x\leqslant 40\\ 2.40, & 40<x\leqslant 60\\ 3.20, & 60<x\leqslant 80\\ 4.00, & 80<x\leqslant 100\\ 6.00, & 100<x\leqslant 120\end{cases}$$

应用4 【个人所得税】依法纳税是每个公民应尽的义务。我国于1993年10月3日发布的《中华人民共和国个人所得税法》中规定国家征收个人所得税是分段计算的，个人所得税的起征点为800元。自1993年个人所得税法实施以来至今已二十多年，其间中国政治经济形势发生了很大变化，国民生产总值持续、快速增长，城乡居民收入大幅度提高。随着人民生活水平的提高，个人所得税的起征点做了多次调整。2011年9月1日对个人所得税进行了新的调整，个人所得税的起征点调为3500元，税率也做了调整，见表1-3。

表1-3 个人所得税计算方法

级　数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过1500元	3
2	超过1500元至4500元的部分	10
3	超过4500元至9000元的部分	20
4	超过9000元至35000元的部分	25
5	超过35000元至55000元的部分	30
6	超过55000元至80000元的部分	35
7	超过80000元的部分	45

如某单位的所有人月收入都不超过10000元，按2011年9月1日发布的《中华人民共和国个人所得税法》建立该单位员工月收入与纳税金额的函数关系式。

解：设某人月收入为 x 元，应缴纳所得税为 y 元，月收入与纳税金额的函数关系式为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 3500\\ 0.03(x-3500), & 3500<x\leqslant 5000\\ 0.1(x-5000)+1500\times 0.03, & 5000<x\leqslant 8000\\ 0.20(x-8000)+3000\times 0.1+1500\times 0.03, & 8000<x\leqslant 125000\end{cases}$$

应用 5　【单位阶跃函数】单位阶跃函数是电学中的一个常用函数，它可表示为

$$U(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

应用 6　【需求函数】在经济学中，某一商品的需求量是指在一定的价格水平下，消费者愿意而且有支付能力购买的商品量。影响商品需求的因素有很多，除了商品的价格这个影响需求的主要因素，还有许多其他因素，如消费者收入的增减 、季节的变换以及消费者的偏好等。如果把价格以外的其他因素都看作是常量，则需求量 D 可视为该商品的价格 P 的函数，这个函数称为需求函数。

一般情况下，商品的价格越低，需求量越大；商品的价格越高，需求量越小。因此，需求函数是单调减少函数。商场可通过采取降低价格、增加商品的销售量(需求量)等营销策略，增加销售收入。

应用 7　【成本函数】成本是指生产特定产量的产品所需要的成本总额。它包括固定成本和可变成本。固定成本是尚未生产产品时的支出，在一定限度内是不随产量变动而变动的费用；可变成本是随产品变动而变动的费用。设 Q 表示产量，C 表示成本，则 C 与 Q 之间的函数关系称为成本函数，记作

$$C=C(Q)=C_0+V(Q),\quad Q\geqslant 0$$

其中，C_0 是固定成本；$V(Q)$是可变成本。

实践模块 1.1

A 组(基础训练)

1. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\sqrt{3x+4}$　　(2) $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$

2. 指出下列函数的复合过程。

(1) $y=(1-x)^3$　　(2) $y=e^{x+1}$

(3) $y=\cos^2(3x+1)$　　(4) $y=\ln\sqrt{x+1}$

(5) $y=\sqrt{x+5}$　　(6) $y=\tan\sqrt{2x-1}$

B 组(能力提高训练)

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1\\ x^2, & x<1\end{cases}$，作出函数 $f(x)$的图像，并求出 $f(5)$，$f(-2)$的值。

2. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$

(2) $y=\arccos\frac{2x+1}{5}+\sqrt{x+1}$

(3) $y=\sqrt{x+2}+\frac{1}{x^2-1}$

(4) $y=\ln(\ln x)$

3. 指出下列函数的复合过程。

(1) $y=\arcsin\sqrt{\cos x}$

(2) $y=\tan^3(e^{3x})$

知识模块 1.2　极限

学习任务

【知识目标】

(1) 理解函数极限的概念。

(2) 理解无穷小、无穷大概念及无穷小与无穷大的关系。

【能力目标】

(1) 掌握函数极限存在的判定。

(2) 掌握无穷小与无穷大的关系。

【学习重点】

函数极限的概念;无穷小、无穷大的概念。

【学习难点】

函数极限的概念。

1.2.1　函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

引例 1-2　【水温的变化趋势】将一壶沸腾的开水放在一间室温恒为 25℃ 的房间里,水温将逐渐降低,随着时间 t 的推移,水温会越来越接近于室温 25℃。

引例 1-3　【熟练工的工时数】生产同一产品熟练工的工时数比新手要少,因为当一个工人不断重复地做同一种工作时,工人的操作方法会不断得到改善,操作时间也在逐渐地减少并逐渐接近于一个确定的时间。

上面两个引例有一个共同的特点:当自变量逐渐增大时,相应的函数值逐渐接近于一个确定的常数。

定义 1-4　对于函数 $f(x)$,如果当自变量的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定常数 A,那么常数 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad 当\ x\to\infty\ 时,f(x)\to A$$

【例 1-4】　如图 1-1 所示,考察当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势。

解：从图中可以看出，当$|x|$无限增大时，曲线 $f(x)=\frac{1}{x}$ 沿 x 轴正向和负向无限接近于 x 轴，即函数值$\frac{1}{x}$无限接近于 0。

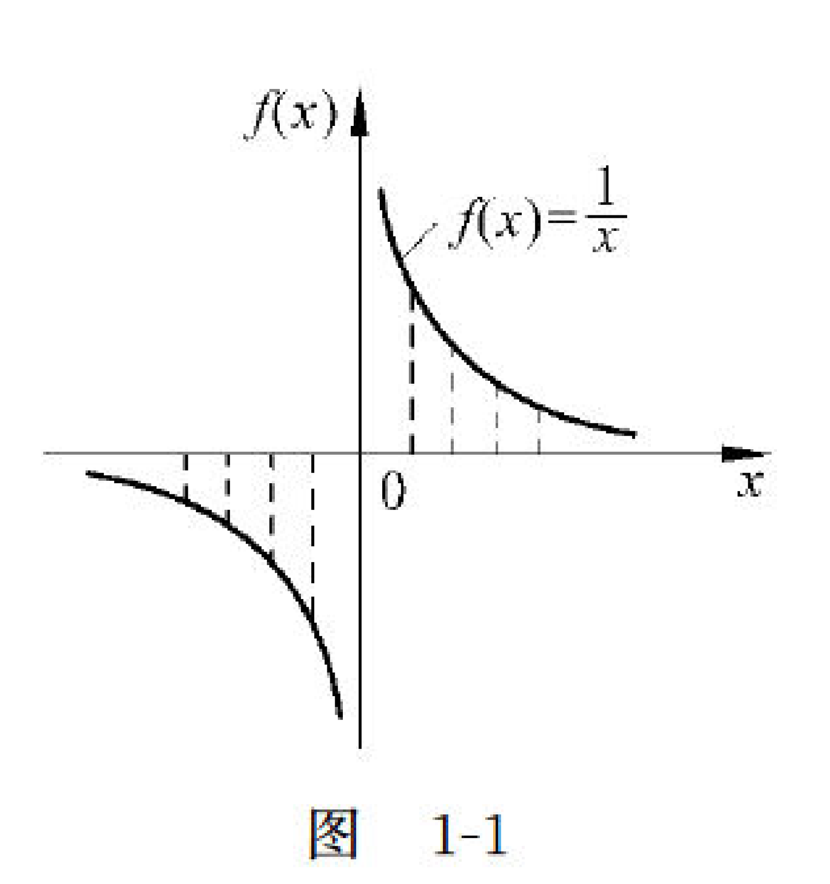


图　1-1

下面给出这种函数极限的定义。

定义 1-5　如果当自变量只沿 x 轴正向无限增大时（记 $x\to+\infty$），函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

如果当自变量只沿 x 轴负向无限增大时（记 $x\to-\infty$），函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to-\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$。

注：对同一个函数 $f(x)$来说，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 成立的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

【例 1-5】　求当 $x\to\infty$时，函数 $y=\arctan x$（其曲线如图 1-2 所示）的极限。

解：因为

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

虽然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 都存在，但不相等，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限

函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$的曲线如图 1-3 所示，先观察当 $x\to-1$ 时，函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$的变化趋势。

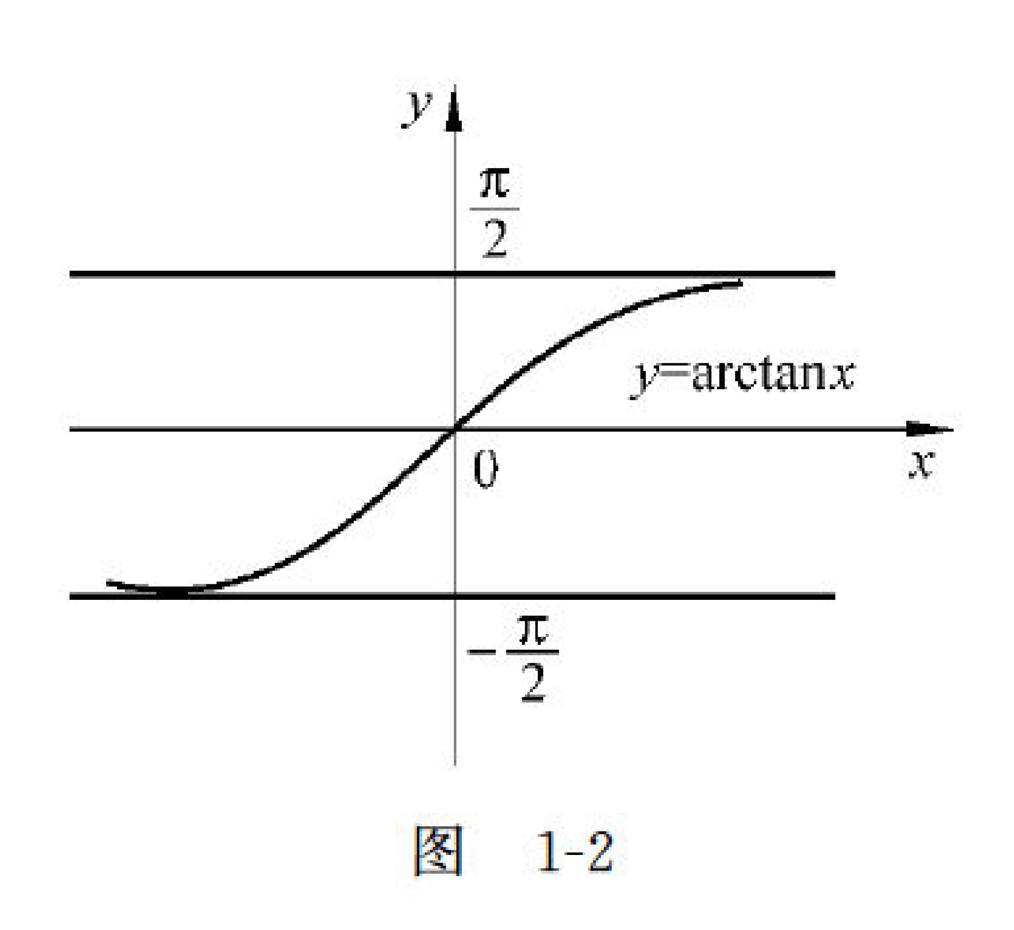


图　1-2

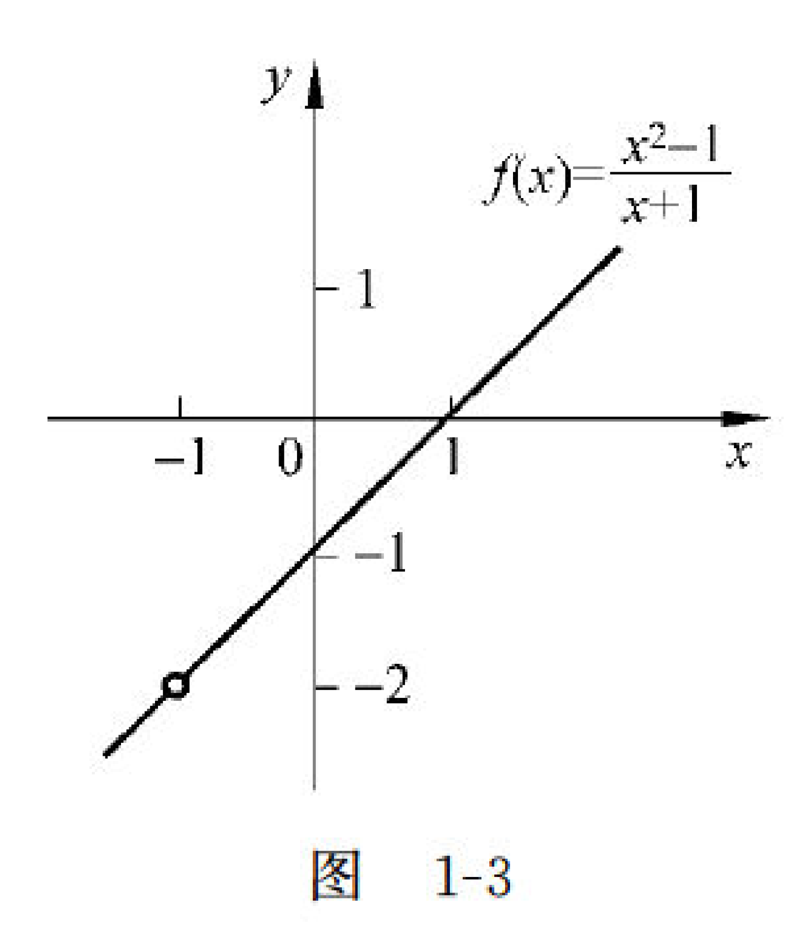


图　1-3

从图 1-3 中可以看出，当自变量 x 无限地接近于-1 时，函数的函数值无限地接近于-2。

从而给出下面函数极限的定义。

定义 1-6　对于函数 $f(x)$，如果当自变量 x 无限地接近于定值 x_0 时，函数 $f(x)$无限地接近于一个确定常数 A，那么常数 A 就叫作函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = A \quad 或 \quad 当\ x\to x_0\ 时，f(x)\to A$$

说明：

(1) 定义中 $x\to x_0$ 的方式可以是任意的，既可以从 x_0 的左侧趋近于 x_0，也可以从 x_0 的右侧趋近于 x_0，还可以从两边同时趋近于 x_0。

(2) 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是否存在与其在点 x_0 有无定义无关。

定义 1-7 如果自变量 x 仅从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0（记为 $x\to x_0^-$）时，函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad 当\ x\to x_0^-\ 时, f(x)\to A$$

定义 1-8 如果自变量 x 仅从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0（记为 $x\to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad 当\ x\to x_0^+\ 时, f(x)\to A$$

定理 1-1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在且相等。

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$

【例 1-6】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$，当 $x\to 0$ 时的极限。

解： 做出函数 $f(x)$ 的图像，如图 1-4 所示。从图中可以看出，

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

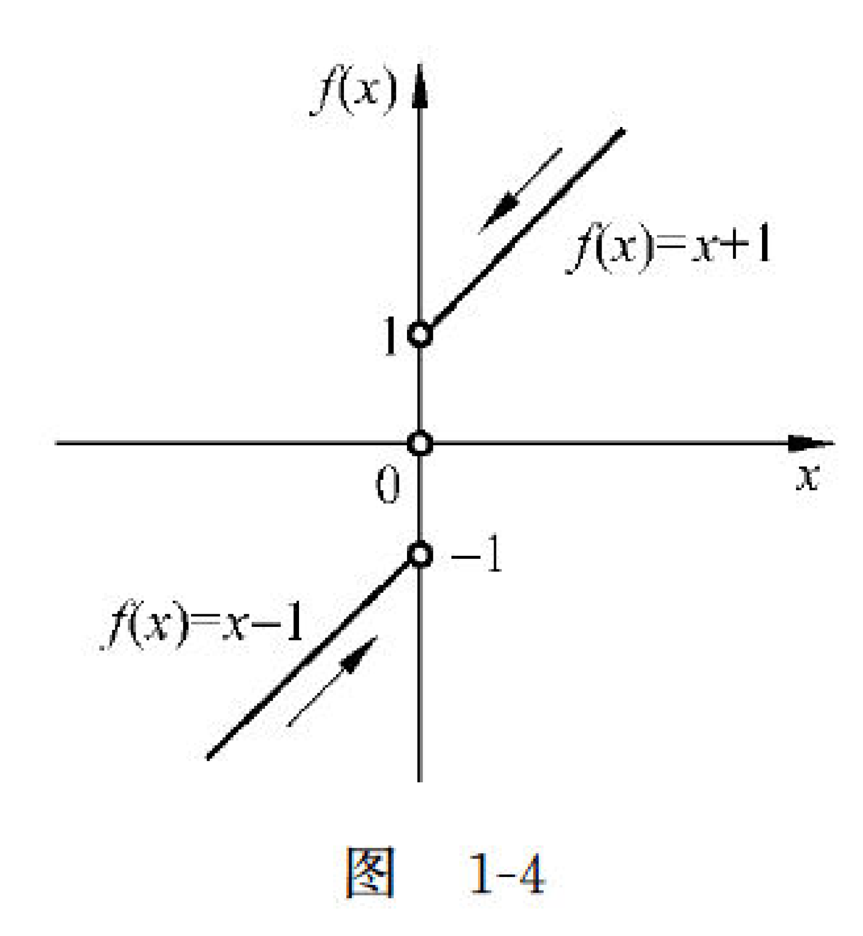


图 1-4

【例 1-7】 单位阶跃函数是电学中的一个常用函数，它可表示为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geqslant 0 \end{cases}$$

求 $\lim\limits_{t\to 0} u(t)$。

解： $\lim\limits_{t\to 0^-} u(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$，$\lim\limits_{t\to 0^+} u(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} 1 = 1$

因为 $\lim\limits_{t\to 0^-} u(t) \neq \lim\limits_{t\to 0^+} u(t)$，所以 $\lim\limits_{t\to 0} u(t)$ 不存在。

1.2.2 无穷小量与无穷大量

引例 1-4 【樟脑丸的质量变化】 在日常生活中，经常用樟脑丸来保护收藏的衣物，但我们发现随着时间的推移，樟脑丸会变得越来越小，最后樟脑丸的质量将会如何变化？

引例 1-5 【单摆运动】 将单摆离开铅直位置的偏度用角来度量，让单摆自己摆动，考虑到机械摩擦力和空气阻力，在这个过程中，角度的变化趋势如何？

1. 无穷小的概念

定义 1-9　如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$的极限为零,则函数 $f(x)$叫作当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量,简称无穷小,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$$

例如,因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,所以函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小。

因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,所以函数$\dfrac{1}{x}$是当 $x\to\infty$时的无穷小。

注意:

(1) 说一个函数是无穷小,必须指明自变量 x 的变化趋势。

(2) 一个绝对值很小的常数不是无穷小。

(3) 常数中只有 0 是无穷小。

2. 无穷小的性质

性质 1　有限个无穷小的代数和是无穷小。

性质 2　有限个无穷小的乘积是无穷小。

性质 3　有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

【例 1-8】　求$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$。

解: 当 $x\to 0$ 时,$\sin\dfrac{1}{x}$的极限不存在。但因为$\lim\limits_{x\to 0}x=0$,所以 x 是当 $x\to 0$ 时的无穷小,而$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 为有界函数,由无穷小的性质 3 可知

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

3. 函数极限与无穷小的关系

定理 1-2　具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和;反之,如果函数可表示为常数与无穷小之和,那么该常数就是这函数的极限,即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中,$\alpha(x)$是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小。

4. 无穷大的概念

定义 1-10　如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$的绝对值无限增大,那么函数 $f(x)$叫作当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量,简称无穷大,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$$

例如,因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,所以函数$\dfrac{1}{x}$是当 $x\to 0$ 时的无穷大。

因为$\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$,所以函数 x^2 是当 $x\to\infty$时的无穷大。

注意：

(1) 说一个函数是无穷大，必须指明自变量 x 的变化趋势。

(2) 一个绝对值很大的常数不是无穷大。

5. 无穷小与无穷大的关系

当 $x\to\infty$ 时，x 是无穷大，$\frac{1}{x}$ 是无穷小；当 $x\to1$ 时，$x-1$ 是无穷小，$\frac{1}{x-1}$ 是无穷大。

一般地，无穷大与无穷小之间有以下的**倒数关系**。

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

应用模块 1.2

应用 1 【设备折旧费】某工厂对一生产设备的投资额是 1 万元，每年的折旧费为该设备账面价格（即以前各年折旧费用提取后余下的价格，单位：万元）的 $\frac{1}{10}$，那么这一设备的账面价格第 1 年为 1，第 2 年为 $\frac{9}{10}$，第 3 年为 $\left(\frac{9}{10}\right)^2$，第 4 年为 $\left(\frac{9}{10}\right)^3$，…，第 n 年为 $\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$，从它的变化趋势可以看出，随着年数 n 的无限增大，账面价格无限接近于 0。

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}=0$。

一般地，$\lim\limits_{n\to\infty}(q)^{n-1}=0(|q|<1)$。

应用 2 【瞬时速度】当物体做自由落体运动时，该物体所经过的路程 s 和时间 t 的函数关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，求下落过程中时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$。

解：取 t_0 附近任一时刻 t，考虑 t 至 t_0 的时间间隔内的平均速度

$$\bar{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{1}{2}g\frac{t^2-t_0^2}{t-t_0}=\frac{1}{2}g(t+t_0),\quad t\neq t_0$$

这里，$\bar{v}$ 随 t 而变，当 t 越来越接近于 t_0 时，平均速度 $\bar{v}$ 近似地描述了物体在 t_0 时刻运动的快慢。而物体在 t_0 时刻的瞬时速度就是平均速度 $\bar{v}$ 的极限，即

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\bar{v}=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{2}g(t+t_0)=gt_0$$

应用 3 【电荷量】在一个电路中的电荷量 Q 由下式定义

$$Q=\begin{cases}C, & t\leqslant0\\ Ce^{-\frac{1}{RC}}, & t>0\end{cases}$$

其中，C,R 为正的常数，求电荷 Q 在 $t\to0$ 时的极限。

解 $\lim\limits_{t\to0^-}Q=\lim\limits_{t\to0^-}C=C$，$\lim\limits_{t\to0^+}Q=\lim\limits_{t\to0^+}Ce^{-\frac{1}{CR}}=C$

因为 $\lim\limits_{t\to 0^-}Q=\lim\limits_{t\to 0^+}Q=C$，所以 $\lim\limits_{t\to 0}Q=C$。

应用 4　【洗涤效果】在用洗衣机清洗衣服时，清洗次数越多，衣服上残留的污渍就越少。当洗涤次数无限增大时，衣服上的污渍就趋于零。即当洗涤次数无限增大时，衣服上的污渍是一个无穷小量。

实践模块 1.2

A 组（基础训练）

1. 填空题。

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=$________。

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=$________。

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=$________。

(4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$ 为无穷大量，则 $x\to$________。

2. 观察下列函数并写出极限值。

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{10}\right)^x$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x$

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x$

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1\\ 1-x^2, & x\geqslant 1\end{cases}$，当 $x\to 1$ 时的极限。

B 组（能力提高训练）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，画出它的图像，并说明当 $x\to 1$ 时的极限是否存在。

2. 下列函数中哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x}(x\to 0)$

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}(x\to\infty)$

(3) $f(x)=\ln x(x\to 0^+)$

(4) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}(x\to 0^+)$

(5) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}(x\to 0^-)$

(6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}(x\to 0)$

知识模块 1.3　极限的运算

学习任务

【知识目标】

（1）掌握极限的四则运算法则。

（2）理解无穷小的比较。

（3）掌握两个重要极限公式。

【能力目标】

（1）能运用极限四则运算法则进行极限的运算。

（2）掌握无穷小的比较方法。

（3）能运用两个重要极限求极限。

【学习重点】

极限的四则运算法则；无穷小的比较；两个重要极限公式。

【学习难点】

两个重要极限公式。

1.3.1　极限的四则运算法则

前文利用极限的定义可以观察出比较简单函数的极限，但是对于大多数函数利用极限的定义很难求出它们的极限，为了比较方便地求出它们的极限，下面介绍极限的四则运算法则。

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则有以下法则和推论。

法则 1　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$。

法则 2　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$。

推论 1　$\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C\cdot A$（$C$ 为常数）。

推论 2　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n=A^n$。

法则 3　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$。

上述法则对于 $x\to\infty$ 的情形也成立，而且法则 1 和法则 2 可以推广到有限个具有极限函数的情形。

【例 1-9】　求 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x-3)$。

解：由极限的四则运算法则得

$$\lim_{x\to 1}(x^2+4x-3)=\lim_{x\to 1}x^2+4\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}3=1+4-3=2$$

【例 1-10】 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$。

解：当 $x\to 3$ 时，由于分子、分母的极限都为零，所以不能直接运用商的运算法则（法则 3）来求极限，但在 $x\to 3$ 的过程中，$x-3\neq 0$，所以采用分解因式的方法，分子、分母同时消去非零公因子 $x-3$，然后再求极限。

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

【例 1-11】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^3-x^2+x}$。

解：当 $x\to 0$ 时，由于分子、分母的极限都为零，所以不能直接运用商的运算法则来求极限，但在 $x\to 0$ 的过程中，$x\neq 0$，所以分子、分母可同时提取非零公因子 x 消去，然后再求极限。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3-x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x^2-x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2-x+1}=1$$

【例 1-12】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$。

解：此题分析同例 1-11，但不能运用分解因式和提取公因子的方法，而是要采用分子有理化的方法来消去非零公因子。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$$
$$=\frac{1}{6}$$

【例 1-13】 求$\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$。

解：当 $x\to -1$ 时，由于两个分式均没有极限，所以不能直接应用差的极限运算法则（法则 1），此时可采用通分化简的方法，然后再求极限。

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$
$$=-1$$

【例 1-14】 求$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x-3}{x^2+1}$。

解：当 $x\to\infty$ 时，由于分子、分母的极限均为无穷大，所以不能直接应用商的极限运算法则，此时可采用分子、分母同除以分子、分母最高次幂项的方法。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-3}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=3$$

【例 1-15】 求$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$。

解：分子、分母同除以 x^3，然后取极限，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

从以上例子可以看出，在计算函数极限时，首先应判断它的类型，对于满足极限四则运算法则条件的，可直接运用法则计算；对于不满足极限四则运算法则条件的，需对函数先进行适当的化简变形，然后再运用法则来进行运算；有时也可利用无穷小的性质、无穷小与无穷大的关系来计算极限。

【例 1-16】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{x^2+7}$。

解：当 $x\to\infty$时，分子及分母的极限都不存在，所以不能应用极限的运算法则 3 来运算，但因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{7}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=0$$

根据无穷大与无穷小的关系可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{x^2+7}=\infty$$

归纳以上的例 1-14、例 1-15、例 1-16，可以得到以下的结论：当 $x\to\infty$时，对一般的有理函数 $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}(a_0\neq0,b_0\neq0,m,n\in N)$有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}a_0/b_0, & m=n\\ 0, & m<n\\ \infty, & m>n\end{cases}$$

1.3.2 无穷小的比较

极限为零的变量为无穷小，而不同的无穷小趋近于零的快慢程度是不同的。例如，当 $x\to0$ 时，x^2 和 x^3 都是无穷小，但 $x^3\to0$ 比 $x^2\to0$ 快。

一般地，设 α 和 β 是在同一自变量的变化过程中的无穷小。

(1) 若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$。

(2) 若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小。

(3) 若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小。特别地，当 $C=1$ 时，则称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$。

【例 1-17】 指出当 $x\to4$ 时，无穷小 $\sqrt{2x+1}-3$ 与 $x-4$ 之间的关系。

解：因为 $\quad\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{1}{3}$$

所以，当 $x\to 4$ 时，$\sqrt{2x+1}-3$ 与 $x-4$ 是同阶无穷小。

下面给出几个常用的等价无穷小，当 $x\to 0$ 时，有 $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$。

可以证明：在求极限过程中，若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$存在，则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$$

利用这一特性可以简化部分函数的极限运算。

【例 1-18】 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$。

解：由于当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$x\sim\sin x$，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

【例 1-19】 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\tan 3x}$。

解：由于当 $x\to 0$ 时，$\arcsin 5x\sim 5x$，$\tan 3x\sim 3x$，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$$

【例 1-20】 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\tan^2 x}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x\tan^2 x\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x\cdot x^2\cdot\cos x}=-\frac{1}{2}$$

注意：在使用无穷小等价代换计算函数极限时，无穷小是以分子、分母或乘积因子的形式出现，否则不能使用无穷小等价代换。

1.3.3　两个重要极限

重要极限一　$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

在使用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 来计算函数极限时，要注意其使用条件。

(1) 极限属于“$\frac{0}{0}$”型。

(2) 所求变量中带有三角函数。

(3) 在极限$\lim\limits_{\Delta \to 0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}$表达式中，$\Delta$ 处要保持一致。

【例 1-21】 求$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\tan x}{x}$。

解：$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

【例 1-22】 求$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$。

解：$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=3$

【例 1-23】 求$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。

解：$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$

【例 1-24】 求$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$。

解：令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$。即有

$$\lim_{x \to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t \to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t \to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=1$$

类似地，$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$。

重要极限二 $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}}$

将极限二中的自变量作如下变换：令 $u=\dfrac{1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{u}$，当 $x\to\infty$时，$u\to 0$，极限二变形为 $\lim\limits_{u \to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$。

从以上两种形式我们可以看出，在使用重要极限$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或$\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$来计算函数极限时，要注意其使用条件。

(1) 极限属于“1^∞”型。

(2) 在极限$\lim\limits_{\Delta \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{\Delta}\right)^\Delta$ 或$\lim\limits_{\Delta \to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$的表达式中，$\Delta$ 处应保持一致。

【例 1-25】 求$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$。

解：$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim\limits_{x \to \infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2$

【例 1-26】 求$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{(-x)\cdot(-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{(-x)}\right]^{(-3)}=\mathrm{e}^{-3}$

【例 1-27】　求$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}\cdot(-2)}=\mathrm{e}^{-2}$

【例 1-28】　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$。

解法 1：
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{(-x)\cdot(-1)}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^{2}$$

解法 2：
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$$
$$=\mathrm{e}^{2}\cdot 1=\mathrm{e}^{2}$$

应用模块 1.3

应用 1　【细菌培养】细菌在培养皿中有足够的食物，但空间有限，对空间的竞争使得细菌总数 N 与时间 t 的关系为
$$N=\frac{1000}{1+\mathrm{e}^{-0.1158t}}$$
问容器中最多能容下多少细菌？

解：容器中最多能容下多少细菌即求当 $t\to+\infty$时，N 的极限。因为
$$\lim_{t\to+\infty}N=\lim_{t\to+\infty}\frac{1000}{1+\mathrm{e}^{-0.1158t}}=\frac{1000}{1+0}=1000$$
所以容器中最多能容下 1000 个细菌。

应用 2　【电路电阻】一个 10Ω 的电阻器与一个电阻为 R_1 的可变电阻并联，电路的总电阻为 $R=\dfrac{10R_1}{10+R_1}$，当含有可变电阻 R_1 的支路突然断路时，求电路的总电阻。

解：当含有可变电阻 R_1 的支路突然断路时，电路的总电阻
$$R=\lim_{R_1\to+\infty}\frac{10R_1}{10+R_1}=\lim_{R_1\to+\infty}\frac{10}{\frac{10}{R_1}+1}=\frac{10}{0+1}=10(\Omega)$$

应用 3　【产品价格预测】设一产品的价格满足 $P(t)=20-20\mathrm{e}^{-0.5t}$（单位：元），请你对该产品的长期价格作一预测。

解：可通过求该产品价格在 $t\to+\infty$时的极限来预测长期价格。

因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(20-20\mathrm{e}^{-0.5t})=\lim\limits_{t\to+\infty}20-\lim\limits_{t\to+\infty}20\mathrm{e}^{-0.5t}$

$$=\lim_{t\to+\infty}20-20\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-0.5t}=20-0=20$$

所以该产品的长期价格为 20 元。

应用 4 【销售预测】当推出一种新的电子游戏光盘时，在短期内销售量会迅速增加，然后下降，其函数关系为 $y=\dfrac{200t}{t^2+100}$，请你对该产品的长期销售做出预测。

解：该产品的长期销售量为当 $t\to+\infty$时的销售量。因为

$$\lim_{t\to+\infty}y=\lim_{t\to+\infty}\frac{200t}{t^2+100}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{200}{t}}{1+\frac{100}{t}}=\frac{0}{1+0}=0$$

所以购买此游戏光盘的人将越来越少，人们转向购买新的游戏光盘。

应用 5 【连续复利】设有本金 10000 元，2009 年存款年利率为 2.25%，若用年复利计算，即每年末将当年的本利和存入银行，5 年后本利和为多少？

解：(1) 若一年计算一次利息，则一年末本利和为 $10000(1+2.25\%)^1$，两年末本利和为$[10000(1+2.25\%)^1](1+2.25\%)=10000(1+2.25\%)^2$，$x$ 年末本利和为 $10000(1+2.25\%)^x$，这就是以年为期的复利计算公式。则 5 年后本利和为

$$10000(1+2.25\%)^5=11176.8(\text{元})$$

(2) 若每季度计算一次利息，季利率为$\dfrac{0.0225}{4}$，一年结算 4 次，一年末本利和为 $10000\left(1+\dfrac{0.0225}{4}\right)^4$。

x 年结算 $4x$ 次，x 年末本利和为 $10000\left(1+\dfrac{0.0225}{4}\right)^{4x}$，于是，5 年后本利和为

$$10000\left(1+\frac{0.0225}{4}\right)^{20}=11187.2(\text{元})$$

(3) 若每年结算 n 次，x 年结算 nx 次，x 年末本利和为

$$10000\left(1+\frac{0.0225}{n}\right)^{nx}$$

(4) 连续复利：当每年结算无穷多次，即每年计息次数 $n\to+\infty$（此时称为连续复利），x 年后本利和为

$$\lim_{n\to+\infty}10000\left(1+\frac{0.0225}{n}\right)^{nx}=10000\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{0.0225}}\right)^{\frac{n}{0.0225}}\right]^{0.0225x}$$

$$=10000\mathrm{e}^{0.0225x}$$

于是，按连续复利计算，5 年后的本利和为

$$10000\mathrm{e}^{0.0225\times5}=10000\mathrm{e}^{0.1125}=11190.7(\text{元})$$

实践模块 1.3

A 组(基础训练)

计算下列函数的极限。

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2}{x+2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-x^2+4x}{x^2+x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+6}{x^2+x}$　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{3x^3+4}$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$　　(10) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

B 组(能力提高训练)

1. 指出各组无穷小之间的关系。

(1) 当 $x\to0$ 时,$\sqrt{1+x}-1$ 与 x^2+x

(2) 当 $x\to0$ 时,$x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 与 x

(3) 当 $x\to1$ 时,$\tan(x-1)$ 与 x^3-x

(4) 当 $x\to0$ 时,$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ 与 $\arctan x^2$

2. 利用等价无穷小求函数的极限。

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 3x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 7x}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos 3x}$

3. 计算下列函数的极限。

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+8}{3x^2+1}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2-1}$　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}$

知识模块 1.4　函数的连续性

学习任务

【知识目标】

(1) 理解函数连续性的概念。

(2) 理解初等函数的连续性。

(3) 掌握闭区间上连续函数的性质(最值定理和介值定理)。

【能力目标】

能运用闭区间上连续函数的性质解决问题。

【学习重点】

函数的连续性;闭区间上连续函数的性质。

【学习难点】

闭区间上连续函数的性质。

1.4.1　函数连续性的定义

在自然现象或工程技术中,我们遇到的许多函数都具有当自变量的变化非常小时,对应的函数值的变化也非常小这一特点,如气温的变化、植物的生长、金属的热胀冷缩等,这些特点反映在数学上就是函数的连续性。

定义 1-11　设函数 $f(x)$在点 x_0 及其近旁有定义,若极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,并且等于函数值 $f(x_0)$,即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处**连续**,此时点 x_0 称为函数 $f(x)$的**连续点**。

上述定义中,若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$在点 x_0 处**右连续**;若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$在点 x_0 处**左连续**;若函数 $f(x)$在区间(a,b)内每一点都连续,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)**内连续**;如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内连续,同时在左端点 a 处右连续,在右端点 b 处左连续,则称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

如果函数 $f(x)$在点 x_0 处不连续,则称点 x_0 为函数 $f(x)$的**间断点**。

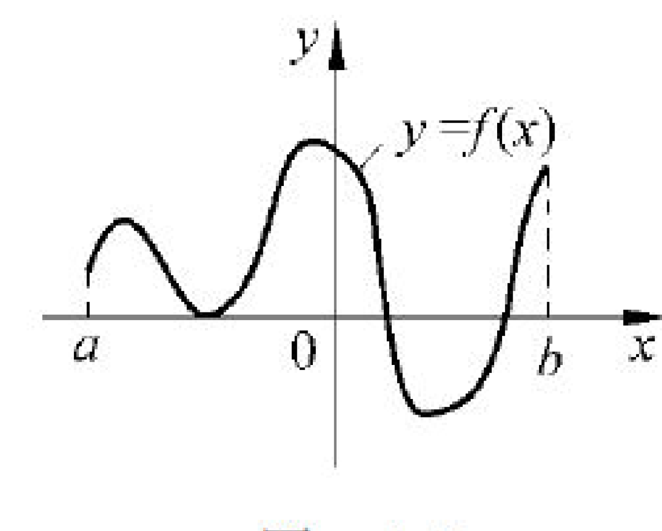


图　1-5

函数的连续性可以通过函数的图像——曲线的连续性表示出来,即函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则函数 $f(x)$在$[a,b]$上的图像就是一条连绵不断的曲线,如图 1-5 所示。

根据函数连续性的定义可知,函数在点 x_0 处连续,必须同时满足下列三个条件。

(1) 函数 $f(x)$在点 x_0 及其近旁有定义。



（2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在。

（3）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

上述三个条件中只要有一个条件不满足，函数 $f(x)$就在点 x_0 处间断。

【例 1-29】　指出函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$的间断点，并作出函数的图像。

解：因为函数 $f(x)$在点 $x=0$ 处没有定义，所以函数 $f(x)$在点 $x=0$ 处间断，其图像如图 1-6 所示。

【例 1-30】　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$在点 $x=1$ 处的连续性。

解：因为$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$，而 $f(1)=2$，由于$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$，故函数 $f(x)$在点 $x=1$处间断，其图像如图 1-7 所示。

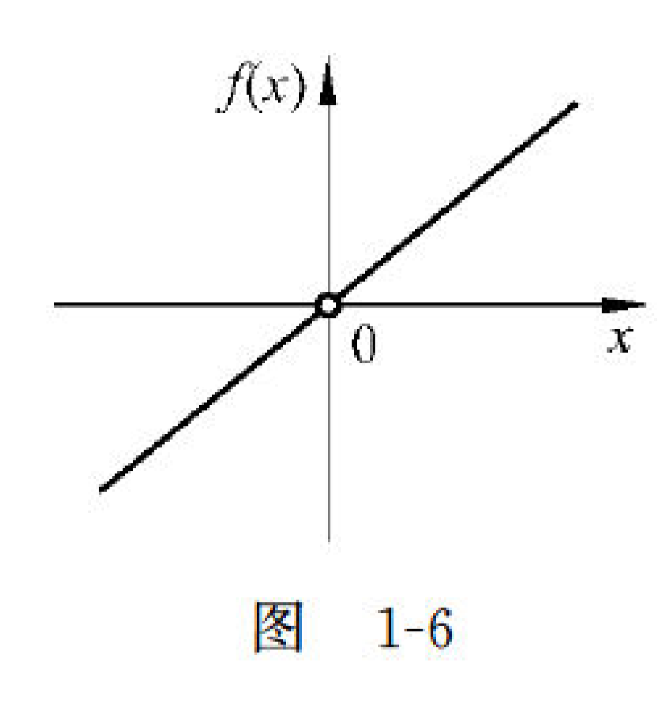


图　1-6

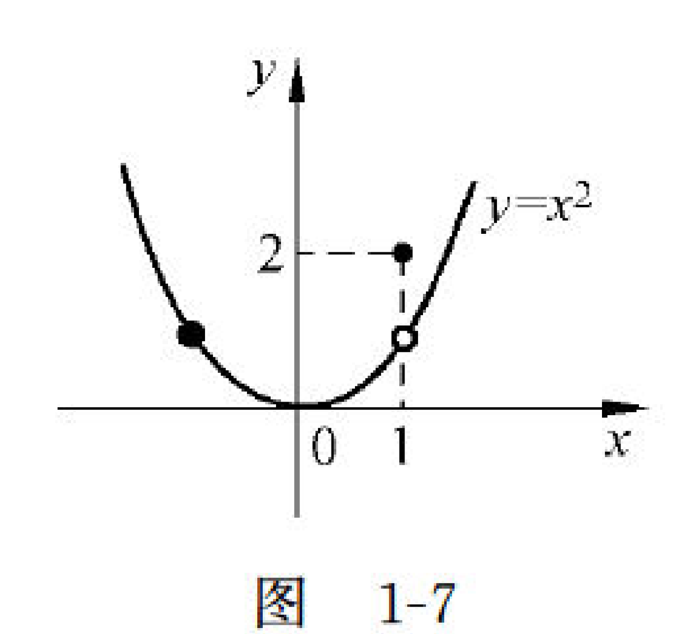


图　1-7

【例 1-31】　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<1\\ 3-x, & x\geqslant 1\end{cases}$在点 $x=1$ 处的连续性。

解：因为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1-x)=0$$

所以

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-x)=2$$

由于

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

故$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在。

所以函数 $f(x)$在点 $x=1$ 处间断，其图像如图 1-8 所示。

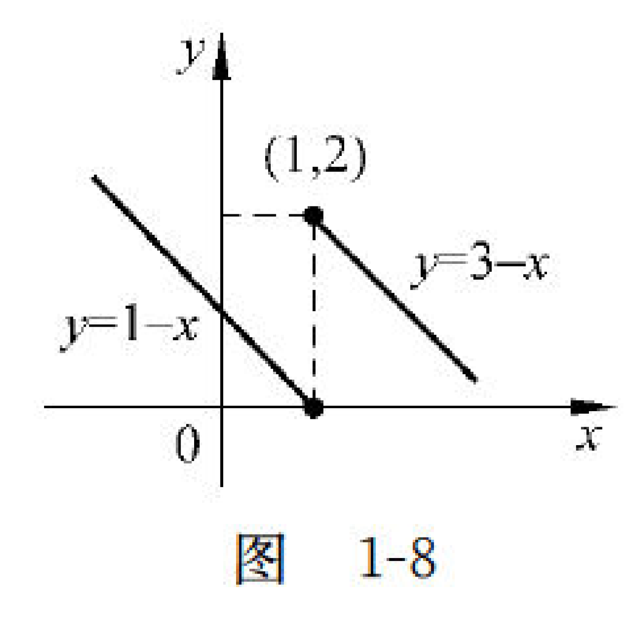


图　1-8

可以证明：初等函数在其定义域内都是连续的。因此，在求初等函数在其定义域内某点处的极限时，只需求该点处的函数值即可。

【例 1-32】　求$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \ln\tan x$。

解：因为 $x=\dfrac{\pi}{4}$是函数 $f(x)=\ln\tan x$ 定义区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内的一个点，所以

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \ln\tan x=\ln\tan\frac{\pi}{4}=\ln 1=0$$

1.4.2 闭区间上连续函数的性质

定理 1-3 （**最大值与最小值定理**）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在闭区间 $[a,b]$ 上必有最大值与最小值。

定理 1-3 表明，若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么，至少有一点 $\xi_1\in[a,b]$ 和一点 $\xi_2\in[a,b]$，当 $x\in[a,b]$ 时，有

$$f(\xi_2)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_1)$$

恒成立。其中，$f(\xi_1)$ 和 $f(\xi_2)$ 分别叫作函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，对应图像如图 1-9 所示。

定理 1-4 （**介值定理**）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在该区间的两端点处取不同的函数值（$f(a)\neq f(b)$），那么，无论 μ 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间怎样的一个值，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=\mu,\quad a<\xi<b$$

定理 1-4 表明，对于闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，当自变量 x 从 a 变化到 b 时，$f(x)$ 必可取遍 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值，这个定理揭示了函数连续变化的特征，对应图像如图 1-10 所示。

推论 （**零点定理**）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且函数 $f(x)$ 在区间两端点的函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=0,\quad a<\xi<b$$

推论表明，若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在开区间 (a,b) 内至少有一个根，对应图像如图 1-11 所示。

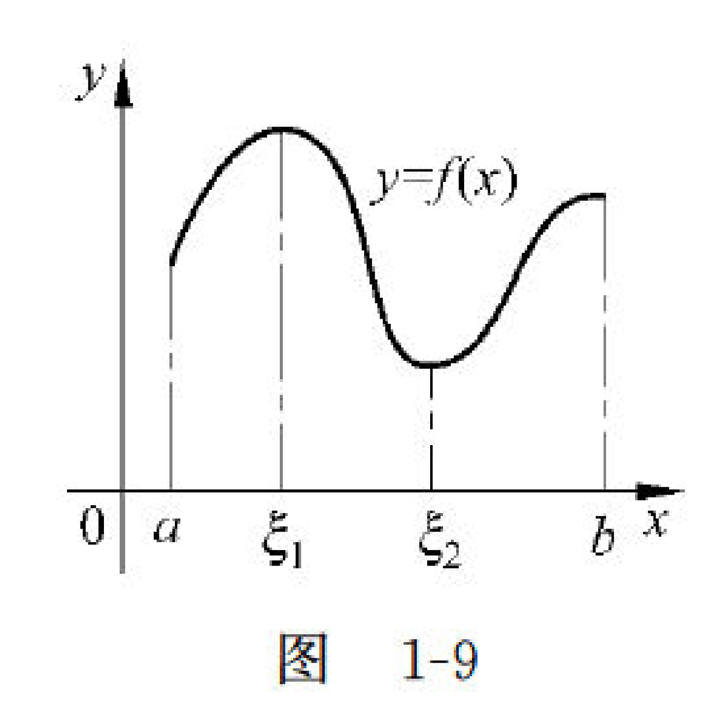


图 1-9

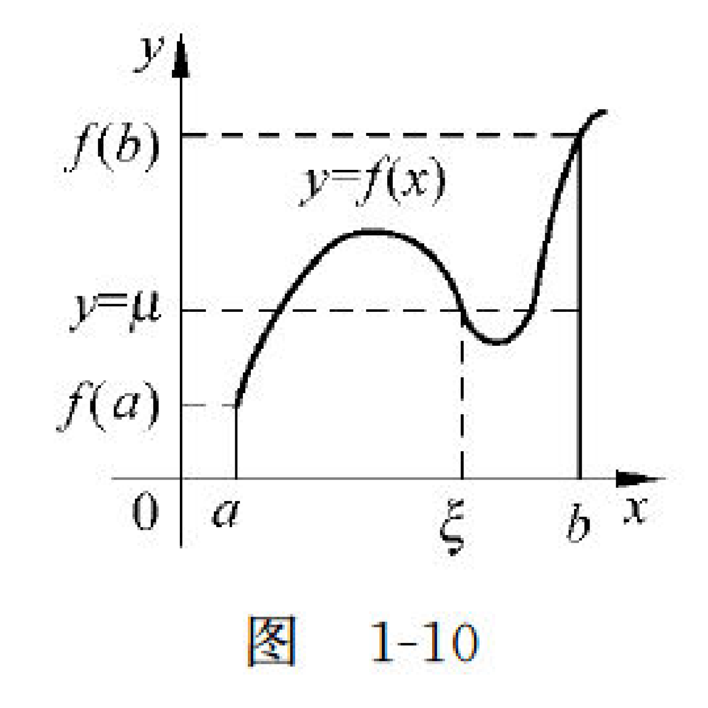


图 1-10

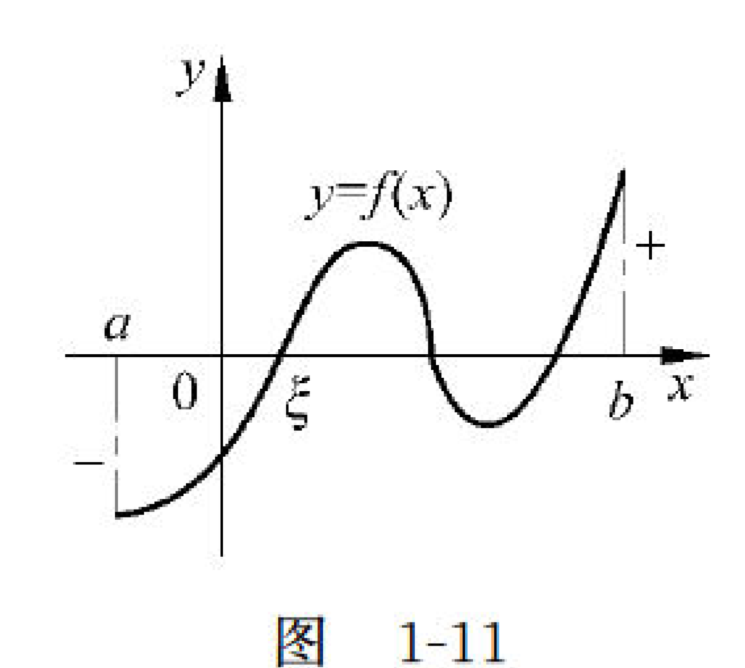


图 1-11

零点定理也称为根的存在定理，它是求方程 $f(x)=0$ 近似根的理论依据。

【例 1-33】 证明方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根。

解：设 $f(x)=x^3+3x^2-1$，它在闭区间 $[0,1]$ 上是连续的，并且在区间两端点的函数值为

$$f(0)=-1<0,\quad f(1)=3>0$$

根据零点定理可知，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi(0<\xi<1)$，使得 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^3+3\xi^2-1=0,\quad 0<\xi<1$$

所以方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根。

应用模块 1.4

应用 1　【原料投放量】 设某种产品的总产量 y 与原料投放量 x 之间有函数关系 $y=3x+2x^2-0.1x^3$。当原料投放量 x 的增量 $\Delta x=1$ 个单位时，求：(1) 当 $x=10$ 个单位时，产量的增量 Δy 是多少？(2) 当 $x=14$ 个单位时，产量的增量 Δy 是多少？并说明它的实际意义。

解：(1) 当 $x=10$ 个单位时，产量的增量

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(11)-f(10)\\ &= (3\times 11+2\times 11^2-0.1\times 11^3)-(3\times 10+2\times 10^2-0.1\times 10^3)\\ &= 141.9-130=11.9(\text{单位})\end{aligned}$$

(2) 当 $x=14$ 个单位时，产量的增量

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(15)-f(14)\\ &= (3\times 15+2\times 15^2-0.1\times 15^3)-(3\times 14+2\times 14^2-0.1\times 14^3)\\ &= 157.5-159.6=-2.1(\text{单位})\end{aligned}$$

这说明，当原料投放量为 10 个单位时，这时增加原料的投放能增加产量；当原料投放量为 14 个单位时，这时增加原料的投放反而导致产量减少。

应用 2　【连续电流】 导线中的电流通常是连续变化的，但当电流增加到一定的程度，会烧断保险丝，电流突然为 0，这时连续性被破坏而出现间断。

应用 3　【电势函数】 分布于 y 轴上某点电荷的电势 φ 由以下公式定义

$$\varphi=\begin{cases}2\pi\delta(\sqrt{y^2+a^2}-y), & y<0\\ 2\pi\delta(\sqrt{y^2+a^2}+y), & y\geqslant 0\end{cases}$$

其中，δ 和 a 都是正的常数，问 φ 在 $y=0$ 处连续吗？

解：$\varphi(0)=2\pi\delta(a+0)=2\pi\delta a$

由于 $\lim\limits_{y\to 0^-}\varphi=\lim\limits_{y\to 0^-}2\pi\delta(\sqrt{y^2+a^2}-y)=2\pi\delta(a-0)=2\pi\delta a$

$\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi=\lim\limits_{y\to 0^+}2\pi\delta(\sqrt{y^2+a^2}+y)=2\pi\delta(a+0)=2\pi\delta a$

所以 $\lim\limits_{y\to 0}\varphi=2\pi\delta a=\varphi(0)$。

因此，分布于 y 轴上一点电荷的电势 φ 在 $y=0$ 处连续。

应用 4　【冰的融化】 设 1g 冰从 -40℃ 升到 100℃ 所需要的热量(单位：J)为

$$f(x)=\begin{cases}2.1x+84, & -40\leqslant x\leqslant 0\\ 4.2x+420, & 0<x\leqslant 100\end{cases}$$

试问函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？若不连续，指出其间断点的类型，并解释其实际意义。

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}4.2x+420=420$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2.1x+84=84$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左、右极限都存在，所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断

点。这说明冰化成水时需要的热量会突然增加。

应用 5 【观看日出】小明为观日出早上 8 时从山下 A 宾馆出发沿一条路径上山，下午 5 时到达山顶并留宿山顶 B 宾馆，次日观日出后于早上 8 时沿同一路径下山，下午 5 时回到山下 A 宾馆，则小明在两天中的同一时刻经过途中的同一地点，为什么？

解：以时间 t 为横坐标，以沿上山路线从山下 A 宾馆到山顶的路程 s 为纵坐标，设第一天早上 8 时的路程为 0，山下到山顶的总路程为 d，第一天的行程设为 $s=f(t)$，则 $f(8)=0$，$f(17)=d$；第二天的行程设为 $s=g(t)$，则 $g(8)=d$，$g(17)=0$。

又设 $h(t)=f(t)-g(t)$，由于 $f(t)$、$g(t)$ 在区间 $[8,17]$ 上连续，所以 $h(t)$ 在区间 $[8,17]$ 上连续，又 $h(8)=f(8)-g(8)=-d<0$，$h(17)=f(17)-g(17)=d>0$。由零点定理可知，在区间 $[8,17]$ 内至少存在一点 t_0，使 $h(t_0)=0$，即 $f(t_0)=g(t_0)$。

这说明在早上 8 时至下午 5 时之间存在某一时刻 $t=t_0$ 使得路程相等，即小明在两天中的同一时刻经过路途中的同一地点。

实践模块 1.4

A 组（基础训练）

1. 填空题。

(1) 若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=$________。

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x-4}$ 的间断点是________，连续区间是________。

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<2\\ a, & x=2\\ x^2, & 2<x<4\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续，则 $a=$________。

2. 选择题。

(1) 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的充要条件是（　　）。

A. $f(x_0)$ 存在　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x_0)=0$

(2) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则下列说法正确的是（　　）。

A. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处一定连续

B. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义

C. 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左右极限相等

D. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

B 组（能力提高训练）

1. 讨论下列函数在指定点处的连续性。

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$x=0$　　(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$，$x=1$

(3) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 2-x, & x\geqslant 0 \end{cases}$, $x=0$　　(4) $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ \frac{1}{2}, & x=1 \\ 1, & 1<x<2 \end{cases}$, $x=1$

(5) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ 1+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$, $x=0$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} a+e^x, & x\leqslant 0 \\ x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$,问 a 为何值时函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

3. 证明方程 $x^3-x-2=0$ 在区间(0,2)内至少有一个根。

4. 证明方程 $e^{2x}-x-2=0$ 至少有一个小于 1 的正根。

5. 设 $f(x)$在[0,2]上连续,且 $f(0)=f(2)$,证明方程 $f(x)=f(x+1)$在[0,1]上至少有一个实根。

本章小结

1. 主要内容

函数的概念;复合函数和初等函数的概念;函数极限的定义;无穷小量与无穷大量的概念;极限的运算法则;两个重要极限;函数连续的概念;闭区间连续函数的性质。

2. 方法要点

在学习时,要熟练掌握函数定义域的求法。基本初等函数是构成初等函数的基本元素,应熟悉常见基本初等函数的图像,了解它们的性质,从而理解复合函数和初等函数的概念。极限的概念是本章的重点之一,应理解它的概念,掌握它的计算,并掌握由它引申出来的概念和概念之间的关系。

常用的求极限的方法如下。

(1) 利用函数的连续性求极限。

(2) 利用运算法则求极限。

(3) 利用无穷小量的性质求极限。

(4) 利用无穷小量和无穷大量的关系求极限。

(5) 利用两个重要极限求极限。

(6) 利用等价无穷小代换求极限。

(7) 利用左、右极限讨论分段函数在其分段点处的极限。

阅读材料 1　函数的起源与发展

1. 早期函数的概念——几何观念下的函数

17 世纪,伽利略(G. Galileo,意大利,1564—1642)在《两门新科学》一书中,几乎全部使用函数或称为变量关系的这一概念,用文字和比例的语言表达函数的关系。1673 年前后,笛卡儿(Descartes,法国,1596—1650)在他的解析几何中,已注意到一个变量对另一

个变量的依赖关系，但因当时尚未意识到要提炼函数概念，因此直到17世纪后期，牛顿、莱布尼茨建立微积分时还没有人明确函数的一般意义，大部分函数是被当作曲线来研究的。1673年，莱布尼茨首次使用function（函数）表示“幂”，后来他用该词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长等曲线上点的有关几何量。与此同时，牛顿在微积分的讨论中，使用“流量”来表示变量间的关系。

2. 18世纪函数概念——代数观念下的函数

1718年，约翰·伯努利（Johann Bernoulli，瑞士，1667—1748）在莱布尼茨函数概念的基础上对函数概念进行了定义：“由任一变量和常数的任一形式所构成的量。”他的意思是凡变量 x 和常量构成的式子都叫作 x 的函数，并强调函数要用公式来表示。

1755年，欧拉（L. Euler，瑞士，1707—1783）把函数定义为：“如果某些变量，以某一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随着变化，我们把前面的变量称为后面变量的函数。”“一个变量的函数是由这个变量和一些数即常数以任何方式组成的解析表达式。”他把约翰·伯努利给出的函数定义称为解析函数，并进一步把它区分为代数函数和超越函数，还考虑了“随意函数”。不难看出，欧拉给出的函数定义比约翰·伯努利的定义更普遍、更具有广泛意义。

3. 19世纪函数概念——对应关系下的函数

1821年，柯西（Cauchy，法国，1789—1857）从定义变量起给出了定义：“在某些变数间存在着一定的关系，当一经给定其中某一变数的值，其他变数的值可随着而确定时，则将最初的变数叫自变量，其他各变数叫作函数。”在柯西的定义中，首先出现了自变量一词，同时指出对函数来说不一定要有解析表达式。不过他仍然认为函数关系可以用多个解析式来表示，这是一个很大的局限。

1822年，傅里叶（Fourier，法国，1768—1830）发现某些函数也已用曲线表示，也可以用一个式子表示，或用多个式子表示，从而结束了函数概念是否以唯一一个式子表示的争论，把对函数的认识又推进了一个新层次。

1837年，狄利克雷（Dirichlet，德国，1805—1859）突破了这一局限，认为怎样去建立 x 与 y 之间的关系无关紧要，他拓广了函数概念，指出：“对于在某区间上的每一个确定的 x 值，y 都有一个确定的值，那么 y 叫作 x 的函数。”这个定义避免了函数定义中对依赖关系的描述，以清晰的方式被所有数学家接受。这就是人们常说的经典函数定义。

等到康托（Cantor，德国，1845—1918）创立的集合论在数学中占有重要地位之后，维布伦（Veblen，美国，1880—1960）用“集合”和“对应”的概念给出了近代函数定义，通过集合概念把函数的对应关系、定义域及值域进一步具体化了，且打破了“变量是数”的极限，变量可以是数，也可以是其他对象。

4. 现代函数概念——集合论下的函数

1914年，豪斯道夫（F. Hausdorff）在《集合论纲要》中用不明确的概念“序偶”来定义函数，其避开了意义不明确的“变量”、“对应”概念。库拉托夫斯基（Kuratowski）于1921年用集合概念来定义“序偶”使豪斯道夫的定义很严谨了。

1930 年，新的现代函数定义为“若对集合 M 的任意元素 x，总有集合 N 确定的元素 y 与之对应，则称在集合 M 上定义一个函数，记为 $y=f(x)$。元素 x 称为自变元，元素 y 称为因变元”。

综合实训 1

1. 填空题。

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{2x}=\dfrac{2}{3}$，则 $a=$________。

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^2$，则 $a=$________。

(3) 当 $x\to 0$ 时，$2\sin x\cos x$ 与 x 相比是________无穷小。

(4) 设函数 $f(x)=\begin{cases}ax, & x<2\\ x^2-1, & x\geqslant 2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续，则 $a=$________。

(5) 函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点为________。

(6) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=$________。

2. 选择题。

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，则下列说法中正确的是(　　)。

A. $f(x_0)=A$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

C. $f(x)$ 在点 x_0 处有定义　　D. $f(x)$ 在点 x_0 处连续

(2) 设函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是(　　)。

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

(3) 函数 $y=\cos\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量的条件是(　　)。

A. $x\to\infty$　　B. $x\to 0$　　C. $x\to\dfrac{\pi}{2}$　　D. $x\to\dfrac{2}{\pi}$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的(　　)。

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0\\ ax+b, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $b=$(　　)。

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. e

3. 计算下列函数的极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$　　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{3x^2+2}$

(7) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{2(x+1)}$　　(8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sin^2 \dfrac{x}{3}}$　　(9) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{3x}$

(10) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x < 1 \\ 2-x, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 的连续性,并画出它的图像。

5. 证明当 $x \to 4$ 时,$\sqrt{x}-2$ 与 x^2-16 是同阶无穷小。

6. 某顾客存入银行 5000 元,存款年利率为 2.25%,若采用复利,即每结算期末将到期的本利和再存入银行,一年结算 6 次,3 年后本利和为多少?若采用连续复利,3 年后本利和又是多少?

7. 证明方程 $x^5-2x^2+x+1=0$ 在区间$(-1,1)$内至少有一实根。

第 2 章 导数与微分

在现实生活中的很多领域，都有与求解函数变化率相关的问题。微分学就是解决变化率问题的一个数学分支，是一个在医学、生物学、工程学、经济学等领域广泛应用的强有力的工具，而导数与微分是微分学的重要组成部分。我们将在这一章里介绍导数与微分的概念及其运算。

知识模块 2.1　导数的概念

学习任务

【知识目标】

(1) 理解导数的概念。

(2) 掌握基本初等函数的导数公式。

(3) 理解导数的几何意义及函数的可导性与连续性之间的关系。

【能力目标】

(1) 掌握按导数定义及基本初等函数导数公式求导数的方法和函数的可导性的判定方法。

(2) 能运用导数的几何意义讨论函数的切线和法线问题。

【学习重点】

导数的概念；基本初等函数导数公式；导数的几何意义；函数的可导性与连续性之间的关系。

【学习难点】

导数的概念。

2.1.1　两个实例

1. 非恒定电流的电流强度

设某电路中非恒定电流从 0 到 t 时刻的这段时间内流过导体横截面的电量为 $Q(t)$，求其在 t_0 时刻的电流强度。

设在时刻 t_0 时有改变量 Δt，则 $Q(t)$ 相应的改变量为 $\Delta Q=Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)$，在时间段 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 内的平均电流强度为 $\bar{i}=\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=\dfrac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t}$，如果时间间隔 Δt 越

小，平均电流强度 $\bar{i}$ 就越接近于 t_0 时刻的瞬时电流强度。因此，当 $\Delta t \to 0$ 时，若极限 $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ 存在，则此极限值就是 t_0 时刻的瞬时电流强度，即

$$i(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t}$$

2. 曲线上 $M_0(x_0, y_0)$ 点处的切线斜率

曲线 $y=f(x)$ 过 $M_0(x_0, y_0)$ 的一条割线 M_0M_1，当点 M_1 沿曲线无限地接近点 M_0 时，若割线 M_0M_1 的极限位置存在，则称此极限位置所对应的直线 M_0T 即为曲线在点 M_0 处的切线，如图 2-1 所示。

点 $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 是曲线上任一点，则割线 M_0M_1 的斜率为

$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

图 2-1

其中，φ 为割线 M_0M_1 的倾斜角，当点 M_1 沿曲线趋于点 M_0 时，$\Delta x \to 0$，$\varphi \to \alpha$（α 为切线 M_0T 的倾斜角）。曲线在点 M_0 处的切线的斜率为

$$K = \tan\alpha = \lim_{\varphi \to \alpha}\tan\varphi = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

以上两个例子的实际意义不同，但抽象的数量关系是相同的，都可归结为求函数的改变量与自变量的改变量之比，当后者趋于零时的极限。在自然科学、工程技术和经济管理中，还有许多非均匀变化的问题，如瞬时速度、线密度等都可归结为这种形式的极限，这种特殊形式的极限就是函数的导数。

2.1.2 导数的定义

定义 2-1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有改变量 Δx 时，相应的函数 y 有改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数，记作

$$f'(x_0),\quad y'\Big|_{x=x_0},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$$

并称 $f(x)$ 在 x_0 点可导，否则称为不可导。

将 $x_0+\Delta x$ 换成 x，此定义表述如下。

定义 2-2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称该极限为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的导数。

定义 2-3 若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，此时 $f(x)$ 对于 (a,b) 内的每一个 x 都有一个确定的导数值与之对应，因此构成了一个新函数，称为 $y=f(x)$ 的导函数（简称为导数），记作 $f'(x)$，y'，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 等，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

显然，$f'(x_0)$就是导数 $f'(x)$在 $x=x_0$ 处的函数值。

2.1.3　导数公式

求函数 $y=f(x)$的导数可按以下三个步骤进行。

(1) 求改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$。

(2) 求比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。

(3) 求极限 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$。

【例 2-1】 求函数 $y=x^2$ 的导数。

解：(1) $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$

(3) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$

即$(x^2)'=2x$。

用同样的方法还可以求出其他基本初等函数的导数。

基本初等函数的导数如下。

$(C)'=0$(C 是常数)　　$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$ 是实数)

$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq 1)$　　$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$　　$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$　　$(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$　　$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$　　$(\mathrm{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

【例 2-2】 求 $y=\sqrt{x}$在 $x=1$ 处的导数值。

解：因为 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

故 $y'|_{x=1}=\left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1}=\frac{1}{2}$

2.1.4　导数的几何意义

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，表示曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,f(x_0))$处切

线的斜率，即

$$k=\tan\alpha=f'(x_0)$$

其中，α 是切线的倾斜角，这就是导数的几何意义。

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

注：若 $f'(x_0)=0$，则 $\alpha=0$，即曲线在该点有平行于 x 轴的切线；若 $f'(x_0)=\infty$，则 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，即曲线在该点有垂直于 x 轴的切线。

【例 2-3】 求曲线 $y=x^3$ 在点$(2,8)$处的切线和法线方程。

解：因为 $k=y'|_{x=2}=3x^2|_{x=2}=12$，所以切线方程为 $y-8=12(x-2)$，即

$$y-12x+16=0$$

法线方程为 $y-8=-\dfrac{1}{12}(x-2)$，即

$$12y+x-98=0$$

2.1.5 可导与连续的关系

定理 2-1 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续。

注：此定理的逆命题不成立，即连续不一定可导。

【例 2-4】 函数 $y=f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，问其在 $x=0$ 处是否可导？

解：在 $x=0$ 自变量的改变量为 Δx，则函数的改变量

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|=\begin{cases}\Delta x, & \Delta x>0\\ -\Delta x, & \Delta x<0\end{cases}$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

所以，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$不存在。

因此，$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导。

$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导的几何意义是此折线在$(0,0)$点处没有切线，如图 2-2 所示。

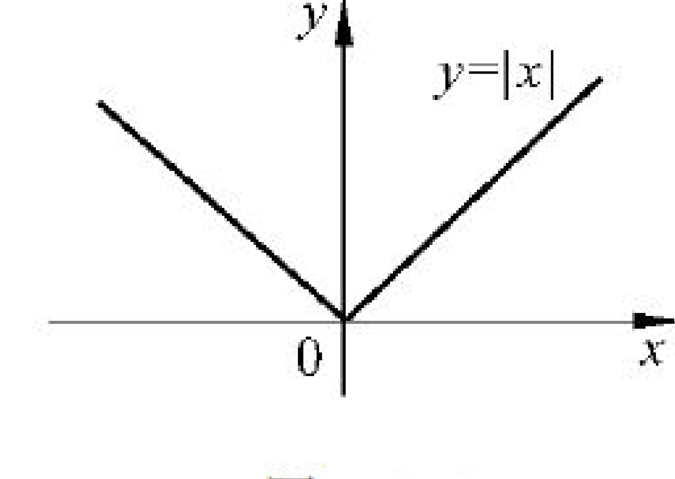


图 2-2

应用模块 2.1

应用 1 **【订货量的变化】**兴隆服装公司利用一种新型材料加工各类精致的手提包很受欢迎，销售出口后供不应求。为扩大出口范围，争取到更多的外商经营，企业第一年实

行限量订货。当某个外商的订货量 x(单位：千个)大于 3 千个时，订货单价 y(单位：百元)服从下面的函数关系

$$y = f(x) = x^2 + 8, \quad x > 3$$

求：(1) 订货量 x 由 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时的平均变化率。

(2) 订货量 x 由 4 千个变化到 5 千个时的平均变化率。

解：(1) 所求平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

(2) 订货量 x 由 4 千个变化到 5 千个时，$x_0=4$，$\Delta x=5-4=1$，利用(1)的结果，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\times 4 + 1 = 9(\text{百元})$$

它表明 x 由 4 千个增加到 5 千个时，订货单价 y 将增加 9 百元。

应用 2　【化学反应速度】化学反应速度是用单位时间内生成物浓度变化的多少来描述的。若浓度与时间的关系为 $N=N(t)$(浓度 N，时间 t)，则在$(t, t+\Delta t)$这段时间内，浓度的改变量为

$$\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t)$$

浓度的平均变化率为

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

那么，该物质在 t 时刻的瞬时反应速度为

$$N'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

上述极限值(即导数值)越大说明物质在 t 时刻的反应速度越快。

应用 3　【电流强度】电流强度是用单位时间内通过导线横截面的电量的多少来描述的。若电量 Q 与时间 t 之间的关系为 $Q=Q(t)$，则在$(t, t+\Delta t)$时间内，导线的平均电流强度为

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

在某时刻 t 的电流强度为

$$i(t) = Q'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

上述极限值越大，说明导线在时刻 t 通过导线横截面的电量越多，此时导线的电流强度越大。

应用 4　【边际收入】边际收入是经济学中的一个概念。边际收入是用单位销售量的变化带来的销售收入总额变化的多少来描述的。若销售收入 R 与销售量 x 的关系是 $R=R(x)$，则当销售量由 x_0 变化到 x 时，总收入的平均变化率为

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0}$$

这个变化率是销售量每增加(或减少)一个单位时总收入的增加值(或减少值)，那么导数

$$R'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{R(x)-R(x_0)}{x-x_0}$$

表示销售量 $x=x_0$ 时，总收入相对于销售量变化时的变化率，即边际收入。此极限值越大，说明销售量为 x_0 时总收入的变化越大。

类似地，在经济学中的边际成本、边际利润、产量的变化率、国债的增长率，物理学中的线密度、角速度、比热容、温度梯度，生物学中的生长速率、血液流速梯度，化学中的压缩系数，心理学中的成绩提高率，地质学中的热传导速度，社会学中传闻的传播速度等相关的概念都是导数在实际问题中的运用。

实践模块 2.1

A 组（基础训练）

1. 求下列函数的导数。

(1) $y=x$　　(2) $y=\frac{1}{x}$

(3) $y=\sqrt{x}$　　(4) $y=\frac{1}{x^2}$

(5) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$　　(6) $y=\sqrt[3]{x^2}$

(7) $y=10^x$　　(8) $y=\log_2 x$

2. 求下列函数在指定点的导数值。

(1) $y=\cos x, y'\big|_{x=\frac{2\pi}{3}}$　　(2) $y=\cot x, y'\big|_{x=\frac{3\pi}{4}}$

(3) $y=\ln x, y'\big|_{x=3}$　　(4) $y=e^x, y'\big|_{x=2}$

(5) $y=\arcsin x, y'\big|_{x=\frac{1}{2}}$　　(6) $y=\arctan x, y'\big|_{x=\sqrt{3}}$

3. 求曲线 $y=\ln x$ 在 $x=e$ 点处的切线方程和法线方程。

B 组（能力提高训练）

1. 填空题。

(1) 曲线 $y=x-\frac{1}{x}$ 上的切线斜率等于 $\frac{5}{4}$ 的点是________。

(2) 设 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，且 $\lim_{x\to 1}f(x)=2$，则 $f(1)=$________。

2. 选择题。

(1) 设 $f'(x_0)$ 存在，且 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=1$，则 $f'(x_0)=$(　　)。

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

(2) 曲线 $y=\frac{\pi}{2}+\sin x$ 在 $x=0$ 处的切线倾斜角为(　　)。

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. 0　　D. 1

(3) 若直线 $y=3x+a$ 与曲线 $y=x^2+5x+4$ 相切，则 $a=$(　　)。

A. 2　　B. -2　　C. 3　　D. -3

(4) 设 $f(x)$在 x_0 处不连续，则(　　)。

A. $f'(x_0)$必存在　　B. $f'(x_0)$必不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$必存在　　D. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$必不存在

3. 设导数 $f'(x_0)$存在，指出下列极限表示什么。

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$　　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

(3) $\lim\limits_{\frac{x}{2}\to x_0}\dfrac{f\left(\dfrac{x}{2}\right)-f(x_0)}{x-2x_0}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，$f(0)=0$ 且 $f'(0)$存在

4. 求曲线 $y=\cos x$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$处的切线方程与法线方程。

5. 讨论函数 $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$在点 $x=0$ 处的连续性和可导性。

知识模块 2.2　导数的运算

学习任务

【知识目标】

(1) 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导公式。

(2) 掌握隐函数求导法和对数求导法。

(3) 掌握初等函数一阶、二阶导数的求法。

(4) 理解高阶导数的求法。

【能力目标】

(1) 能运用导数的四则运算法则求导数。

(2) 掌握复合函数、隐函数和对数函数的求导方法。

(3) 掌握初等函数一阶、二阶导数的求法。

【学习重点】

导数的四则运算法则；复合函数、隐函数和对数函数求导法；高阶导数的求法。

【学习难点】

隐函数求导法和对数函数求导法。

引例 2-1　【瞬时速度】已知某物体做变速直线运动，其运动方程为 $s=(t^2+1)(t+1)$(单位：m)，如何求在 $t=3$s 时的速度？

上述问题涉及导数的运算，运用导数的定义计算是比较烦琐的，是否有更加便捷的方法呢？

2.2.1 导数的四则运算法则

定理 2-2 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商 $\left(u\pm v, uv, \frac{u}{v}(v\neq 0)\right)$ 在点 x 处也可导，且

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$。

(2) $(uv)'=u'v+uv'$。

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$。

推论 1 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 为有限个可导函数，则

$$(u_1\pm u_2\pm\cdots\pm u_n)'=u_1'\pm u_2'\pm\cdots\pm u_n'$$

推论 2 $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$

推论 3 $(Cu)'=Cu'$（C 为常数）

推论 4 $\left(\frac{C}{u}\right)'=-\frac{Cu'}{u^2}$（$C$ 为常数）

【例 2-5】 $y=x^4+3\sin x-\tan\frac{\pi}{4}$，求 y'。

解：$y'=(x^4)'+3(\sin x)'-\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)'$

$=4x^3+3\cos x$

【例 2-6】 求 $y=x\cos x$ 的导数。

解：$y'=x'\cos x+x(\cos x)'=\cos x-x\sin x$

【例 2-7】 求 $y=\frac{1}{\cos x}$ 的导数。

解：$y'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\cdot\tan x$

即

$$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$$

2.2.2 复合函数求导法则

定理 2-3 （**复合函数的求导法则**）设：

(1) $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，$u_x'=\varphi'(x)$。

(2) $y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处可导，$y_u'=f'(u)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处也可导，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad 或 \quad y_x'=y_u'\cdot u_x'$$

推论 若 $y=f(u), u=\varphi(v), v=\psi(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 对 x 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \quad 或 \quad y_x'=y_u'\cdot u_v'\cdot v_x'$$

【例 2-8】 求 $y=\sin 2x$ 的导数。

解：$y'=(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$

【例 2-9】 求 $y=\mathrm{e}^{-x}$的导数。

解：$y'=(\mathrm{e}^{-x})'=\mathrm{e}^{-x}(-x)'=-\mathrm{e}^{-x}$

【例 2-10】 求 $y=(2x+1)^{10}$的导数。

解：$y'=[(2x+1)^{10}]'=10(2x+1)^9\cdot(2x+1)'=20(2x+1)^9$

【例 2-11】 求 $y=2^{\cos\frac{x}{2}}$的导数。

解：$y'=2^{\cos\frac{x}{2}}\ln 2\left(\cos\frac{x}{2}\right)'=2^{\cos\frac{x}{2}}\ln 2\left(-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{2}\ln 2\cdot 2^{\cos\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}$

【例 2-12】 求 $y=\ln\arctan\frac{x}{2}$的导数。

解：$y'=\frac{1}{\arctan\frac{x}{2}}\left(\arctan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\arctan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{2}{(4+x^2)\arctan\frac{x}{2}}$

2.2.3　隐函数的求导法则

前文中我们所涉及的函数是能明显地表示为关系式 $y=f(x)$的显函数，如果变量 x 和 y 的关系是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的，这种函数称为隐函数。有些隐函数可以化为显函数，如方程 $x+y^3-1=0$ 可以化为显函数 $y=\sqrt[3]{1-x}$；但有些隐函数则很难或不能化为显函数，如 $x^2y+\mathrm{e}^{x+y}=0$。如何求隐函数的导数？下面给出隐函数的求导方法。

在隐函数中，因为函数 y 和 x 的关系隐藏在方程 $F(x,y)=0$ 之中，所以求隐函数的导数，只需对方程 $F(x,y)=0$ 两边同时关于 x 求导，并将方程中的 y 看成 x 的函数 $y=f(x)$，从中解出函数的导数 y'即可。

【例 2-13】 求由方程 $y^2+xy+y=1$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$的导数 y'。

解：方程中 y 是 x 的函数，y^2 是 x 的复合函数，因此按复合函数的求导法两边同时对 x 求导。

$$(y^2)'+(xy)'+(y)'=1'$$

即

$$2y\cdot y'+y+xy'+y'=0$$

解出 y'，得

$$y'=-\frac{y}{2y+x+1}$$

一般地，由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数的导数 y'的表达式中含有 x 与 y。

【例 2-14】 求曲线 $xy+\ln y=1$ 在点 $M(1,1)$处的切线方程。

解：方程两边同时对 x 求导，得

$$y+xy'+\frac{1}{y}y'=0$$

解出 y'，得

$$y'=-\frac{y^2}{xy+1}$$

则该曲线在点 $M(1,1)$ 处切线的斜率为

$$k=y'\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{2}$$

所求切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$

即

$$x+2y-3=0$$

2.2.4 对数求导法

对一些较特殊的函数的求导，如幂指函数 $y=[f(x)]^{g(x)}$ $(f(x)\neq 0)$ 及幂、积、商等运算较繁的式子，如 $y=(3x-1)^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$，可以采用两边取对数，化为隐函数求导的方法，这种求导方法称为对数求导法。

【例 2-15】 求 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数。

解：等式两边取自然对数，得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$

上式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

所以

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

【例 2-16】 求 $y=(3x-1)^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ 的导数。

解：等式两边取对数，得

$$\ln y=\frac{5}{3}\ln(3x-1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x-2)$$

上式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{3x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}$$

所以

$$y'=(3x-1)^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\left[\frac{5}{3x-1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x-2)}\right]$$

注意：在这两类显函数的导数表达式中，函数记号 y 要用相应的 x 的表达式代入，使导数仍表示为显函数。

2.2.5　高阶导数

定义 2-4　若函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)$仍是 x 的可导函数，可以对 x 再求导，则把 $f'(x)$的导数叫作函数 $y=f(x)$的二阶导数，记作

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}$$

函数 $y=f(x)$的二阶导数的导数叫作 $y=f(x)$的三阶导数，以此类推 $y=f(x)$的 $n-1$ 阶导数的导数叫作 $y=f(x)$的 n 阶导数，记作

$$y^{(n)},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}$$

二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**。

【例 2-17】　求 $y=\ln\sin x$ 的二阶导数。

解：$y'=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

$y''=(\cot x)'=-\csc^2 x$

【例 2-18】　求 $y=\tan x$ 的二阶导数。

解：$y'=\sec^2 x$

$y''=2\sec x(\sec x)'=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\tan x$

应用模块 2.2

应用 1　【生猪屠宰】红宇肉联厂引进了一条肉类加工生产线后，加工生猪的成本大大降低。肉类加工的第一道工序是对生猪进行屠宰，如果该厂每天屠宰生猪最多为 1000 头，每天屠宰生猪的总成本 y(单位：元)是日宰生猪量 x(单位：头)的函数

$$y=f(x)=1000+7x+50\sqrt{x},\quad x\in[0,1000]$$

求：(1) 当每天屠宰生猪为 100 头时，总成本是多少？

(2) 当每天屠宰生猪为 100 头时，平均单位成本是多少？

(3) 当每天屠宰生猪由 100 头增加到 225 头时，总成本增加多少？

(4) 当每天屠宰生猪由 100 头增加到 225 头时，总成本的平均变化率是多少？并说明其含义。

(5) 当每天屠宰生猪为 100 头时，边际成本是多少？并说明其含义。

解：(1) 当每天屠宰生猪 $x=100$ 头时，总成本为

$$f(100)=1000+7\times100+50\sqrt{100}=2200(元)$$

(2) 当每天屠宰生猪 $x=100$ 时，平均成本为

$$\frac{f(100)}{100}=\frac{2200}{100}=22(元)$$

(3) 当每天屠宰生猪 x 由 100 头增加到 225 头时，$\Delta x=225-100=125$，又由(1)计算结果知 $f(100)=2200$，类似可求得 $f(225)=3325$，所以相应总成本增加了

$$\Delta y=f(225)-f(100)=3325-2200=1125(元)$$

(4) 当每天屠宰生猪 x 有 100 头增加到 225 头时,总成本的平均变化率为

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=100,\Delta x=125}=\frac{1125}{125}=9(\text{元/头})$$

即日屠宰生猪由 100 头增加到 225 头时,多屠宰一头总成本平均增加 9 元。

(5) 由总成本函数求得生猪屠宰的边际成本为

$$y'=f'(x)=(1000+7x+50\sqrt{x})'=7+50\frac{1}{2\sqrt{x}}=7+\frac{25}{\sqrt{x}}$$

所以当每天屠宰生猪 $x=100$ 头时,边际成本为

$$f'(100)=7+\frac{25}{\sqrt{100}}=9.5(\text{元/头})$$

其实际含义是:当每天屠宰生猪为 100 头时,总成本的增长率是每头 9.5 元。

应用 2 【线路安装】电信公司要估计安装住宅电话新线路的数量。该公司拥有的总电话线数量、拥有的客户数量以及每个客户拥有电话线数量都是时间的函数,依次记为 $L=L(t)$,$s=s(t)$,$n=n(t)$。在每个月的开始,不妨令 $t=0$,则 $L(t)=s(t)n(t)$。若 1 月初,公司有 100000 个用户,平均每个用户拥有 1.2 条电话线路。估计客户每月的增长率 1000,调查发现,平均每个用户想要在 1 月底再安装 0.01 条新线路。通过计算在月初电话线路的增长,预计一下在 1 月份该公司将为用户安装新线路的数量。

解:由题意得

$$s(0)=100000,\quad n(0)=1.2$$
$$s'(0)\approx 1000,\quad n'(0)\approx 0.01$$

那么,按题意要求 $L'(0)$。根据乘积的求导法则,有

$$L'(t)=[s(t)n(t)]'=s'(t)n(t)+s(t)n'(t)$$

因此

$$\begin{aligned}L'(0)&=s'(0)n(0)+s(0)n'(0)\\&\approx 1000\times 1.2+100000\times 0.01=2200\end{aligned}$$

即该公司在 1 月份将要安装约 2200 条新线路。

应用 3 【汽车配件的需求】吉利汽配公司生产一种小型的汽车配件,设市场上对此配件的商品需求量为 q,销售的价格为 p,由多年的经营实践得知此配件的需求量 q 与价格 p 之间的关系(经济学中称为需求函数)近似为

$$q=\frac{10000}{(0.5p+1)^2}+e^{-0.1p^2}$$

如果配件的价格按每年 5%的比率均匀增加,现在销售价格为 1.00 元,问此时需求量将如何变化?

解:因为需求量 q 随价格 p 的变化而变化,而价格 p 又随时间 t 的变化而变化,所以 q 是 t 的复合函数。根据题意知,$\frac{dp}{dt}=0.05p$,$p=1.00$。

由复合函数的求导法则得

$$\frac{dq}{dt}=\frac{dq}{dp}\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dp}\left[\frac{10000}{(0.5p+1)^2}+e^{-0.1p^2}\right]\frac{dp}{dt}$$

$$= \left[-\frac{10000\times2\times0.5}{(0.5p+1)^3}-0.1\times2pe^{-0.1p^2}\right]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

代入 $p=1.00$，$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right|_{p=1.00}=0.05\times1=0.05$ 得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\left[-\frac{10000\times2\times0.5}{(0.5+1)^3}-0.1\times2pe^{-0.1}\right]\times0.05=-148.2$$

即该配件的商品需求量减少的速率为每年 148.2 个单位(该问题又称为相关变化率的问题)。

应用 4　【分期对投资的影响】若初期投入为 A_0，t 年末的本利和 $A_t=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$，求本利和 A 相对于分期 n 的变化率。

解：因为 $A_t=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=A_0e^{nt\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)}$，所以本利和 A 相对于分期 n 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n}=A_0e^{nt\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)}\left[t\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)+nt\frac{1}{1+\frac{r}{n}}\left(-\frac{r}{n^2}\right)\right]$$

$$=A_0e^{nt\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)}\left[t\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)-\frac{tr}{n+r}\right]$$

$$=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}\left[t\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)-\frac{tr}{n+r}\right]$$

应用 5　【水位上涨】南方多雨地区，雨季里水库的水位要时时进行监测。在某一水库测得河水以 $8\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ 的体流量流入水库中，水库形状是长 $AB=4000\mathrm{m}$，顶角为 $120°$ 的水槽(见图 2-3)，问水深 20m 时，水位每小时上升几米？

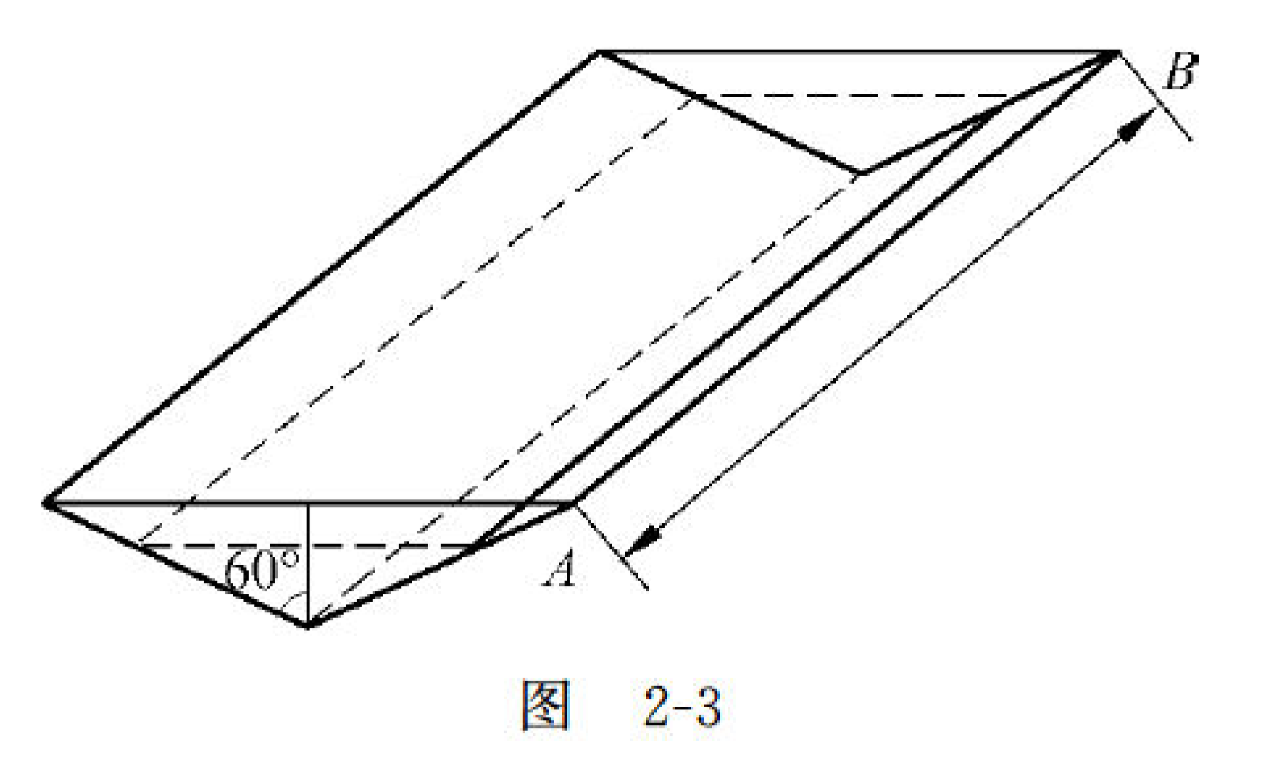


图　2-3

解：设在 t 时刻水深为 $h(t)$，由水库内水量 V 是水深 h 的函数及水深 h 又是时间 t 的函数知，V 是 t 的复合函数，又由题意可求得

$$V=4000\sqrt{3}h^2 \tag{1}$$

所以要求的是当 $h=20\mathrm{m}$ 时，水面每小时上升的速度 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$。而 h 是由(1)式所确定的隐函数，故两边对(1)式关于 t 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=8000\sqrt{3}h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

又 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=8\mathrm{m}^3/\mathrm{s}=28800\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$，$h=20\mathrm{m}$ 代入上式求得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\approx0.104\mathrm{m/h}$$

即水深为 20m 时，水位每小时约上升 0.104m。

应用 6 【血压变化】人的血液从心脏流出，经主动脉后流到毛细血管，再通过静脉流回心脏。假设某人在心脏收缩的一个周期内血压 P(单位：mmHg)和血液从心脏流出的时间 Q(单位：s)的参数方程为 $\begin{cases} Q=\sqrt{t} \\ P=25+\dfrac{98}{t+1} \end{cases}$，$t>0$，求此人在心脏收缩的一个周期内血压的变化率，并由此判断这个人的血压是升高了还是降低了。

解：因为求血压的变化率即是求血压 P 关于时间 Q 的导数$\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}$，由于

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-\frac{98}{(t+1)^2}$$

所以血压的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\dfrac{98}{(t+1)^2}}{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}=-\frac{196\sqrt{t}}{(t+1)^2}$$

由血压的变化率$\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}<0$，可判断这个人的血压是降低了。

应用 7 【飞机启航】飞机起飞的一段时间内，设飞机运动的路程 s(单位：m)与时间 t(单位：s)的关系满足 $s=t^3-\sqrt{t}$，求当 $t=4$s 时飞机的加速度。

解：因为

$$s'=(t^3-\sqrt{t})'=3t^2-\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$s''=\left(3t^2-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)'=6t+\frac{1}{4t\sqrt{t}}$$

所以当 $t=4$s 时，飞机的加速度为

$$a=s''|_{t=4}=6\times4+\frac{1}{4\times4\sqrt{4}}=24\frac{1}{32}(\mathrm{m/s^2})$$

应用 8 【方案选择】南方地区经济发达，高速公路的建设发展迅猛。某工程建设公司承包了一段公路的建设任务，建设周期至少要三年。这一公路的建设有两个可供选择的方案，其利润是 L(单位：百万元)，时间是 t(单位：年)，这两种方案的数学模型如下。

模型一：
$$L_1(t)=\frac{3t}{t+1}$$

模型二：
$$L_2(t)=\frac{t^2}{t+1}+1$$

那么该公司选择哪种方案的模型最优？

解：两种方案的数学模型已经给出，那么最优方案模型的选择首先考虑的是使该公司获利最大者。为此先进行比较：

当 $t=1$ 时，因为 $L_1(1)=\dfrac{3\times1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$，$L_2(1)=\dfrac{1^2}{1+1}+1=\dfrac{3}{2}$，即一年后两个模型的利润额是相等的。同样我们可以计算当 $t=2$ 时，$L_1(2)=2$，$L_2(2)=\dfrac{7}{2}$，显然两年后选择第二

个模型要优于第一个模型，那么是什么原因呢？我们再比较两个模型的利润增长率。

$$L_1'(t)=\left(\frac{3t}{t+1}\right)'=\frac{3}{(t+1)^2}$$

$$L_2'(t)=\left(\frac{t^2}{t+1}+1\right)'=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}$$

当 $t=1$ 时，这两个模型的增长率仍然相等。

$$L_1'(1)=\left(\frac{3}{1+1}\right)'=\frac{3}{4},\quad L_2'(1)=\frac{1^2+2\times 1}{(1+1)^2}=\frac{3}{4}$$

下面我们再来考察这两个模型的利润增长率是如何变化的，利润增长率的变化率是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}t^2}$$

对这两个模型来说，分别有

$$L_1''(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}L_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{3}{(t+1)^2}=-\frac{6}{(t+1)^3}$$

$$L_2''(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}L_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{1}{(t+1)^2}\right)=\frac{2}{(t+1)^3}$$

在 $t=1$ 处，每个模型利润增长率的变化率是

$$L_1''(1)=-\frac{6}{(1+1)^3}=-\frac{3}{4},\quad L_2''(1)=\frac{2}{(1+1)^3}=\frac{1}{4}$$

对于第一个模型来说，在 $t=1$ 处利润增长率是正的，但是增长率的变化率 $L_1''(1)$ 却是负的，即该模型的利润增长率在减速；对第二个模型来说，在 $t=1$ 处不但利润增长率是正的，而且利润增长率的变化率 $L_2''(1)$ 也是正的，即利润的增长率在加速。

那么采用哪个模型呢？首先会发现从现在起一年以后的利润及利润增长率是相等的，但第二个模型的增长率在增加，而第一个模型的增长率则在减速，所以随着时间的推移，第二个模型要优于第一个模型。考虑到建设周期至少要三年，所以该公司应选择第二个模型。

实践模块 2.2

A 组（基础训练）

1. 利用导数的四则运算法则求下列函数的导数。

(1) $y=2x^3-3x^2+1$　　(2) $y=\sqrt{x}+\frac{2}{x}-\ln x$

(3) $y=x\ln x$　　(4) $y=\frac{\arctan x}{1+x^2}$

2. 求下列复合函数的导数。

(1) $y=\cos 3x$　　(2) $y=\mathrm{e}^{x^2}$

(3) $y=\ln^3 x$　　(4) $y=2^{\sin x}$

(5) $y=\sqrt{1-x^2}$　　(6) $y=\log_a(2x-1)$

(7) $y=\ln(1+x^2)$　　(8) $y=\ln\ln x$

(9) $y=\arcsin\sqrt{x}$　　(10) $y=\sin^3(1-2x)$

3. 求下列方程所确定的隐函数的导数或在指定点的导数。

(1) $x^2+y^2=2x$　　(2) $xy-e^x-e^y=0$,点$(0,1)$

4. 求下列函数的二阶导数。

(1) $y=\sin x+\cos x$　　(2) $y=e^{2x}$

(3) $y=xe^x$　　(4) $y=(1+x^2)\arctan x$

B 组(能力提高训练)

1. 利用导数的四则运算法则求下列函数的导数。

(1) $y=e^x(\cos x+\sin x)$　　(2) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

2. 求下列复合函数的导数。

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　　(2) $y=\arctan(x^2+1)$

(3) $y=\sin x\cos^3 x$　　(4) $y=\ln\cos\sqrt{2x}$

(5) $y=\arcsin(\sin x)$　　(6) $y=\sin 2x+\sin x^2$

3. 求下列方程所确定的隐函数的导数。

(1) $x^3+6xy+5y^3=3$　　(2) $\sin(xy)=x$

4. 求函数 $y=(\sin x)^x$ 的导数。

5. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$的导数。

知识模块 2.3　函数的微分

学习任务

【知识目标】

(1) 理解微分的概念,导数与微分之间的关系。

(2) 掌握微分基本公式。

(3) 掌握微分的四则运算法则、一阶微分形式不变性。

【能力目标】

(1) 能运用微分的概念和微分的四则运算法则进行微分问题的讨论。

(2) 能运用微分进行近似计算。

【学习重点】

导数和微分之间的关系;一阶微分形式不变性。

【学习难点】

微分的概念。

引例 2-2　【金属薄片受热后面积的改变量】某一正方形金属薄片的边长为 2m，当金属受热边长增加 0.01m 时，面积的改变量是多少？

2.3.1　微分的概念

在实际应用中，经常会遇到当自变量有一个微小的改变时计算相应函数的改变量的问题，一般来说比较困难，引入微分的概念，使得这些问题得以解决。

前面介绍了 $f(x)$在点 x_0 处的导数的定义：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

根据极限与无穷小量的关系，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

即

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

其中，$\alpha\cdot\Delta x$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小量；$f'(x_0)\cdot\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，称为线性主部。因此，我们可以用线性主部近似地表示 Δy，这部分就定义为微分。

定义 2-5　如果函数 $y=f(x)$在 x_0 处的改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

其中，$o(\Delta x)$是 Δx 的高阶无穷小量，则称 $y=f(x)$在点 x_0 处可微，并称 $f'(x_0)\Delta x$ 为 $y=f(x)$在 x_0 处的微分，记为 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$。

由上述定义有 $\Delta y\approx\mathrm{d}y$。

定理 2-4　函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微的充要条件是函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导。

定义 2-6　自变量的改变量称为自变量的微分，记为 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$。

定义 2-7　函数 $y=f(x)$在任意点的微分称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x=f'(x)\mathrm{d}x$$

从而有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$，即函数 $f(x)$的导数是函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 的商，因此导数也称为微商。

图 2-4 给出了微分 $\mathrm{d}y$ 的几何意义，就是曲线 $y=f(x)$在点 p 处的切线的纵坐标的改变量。

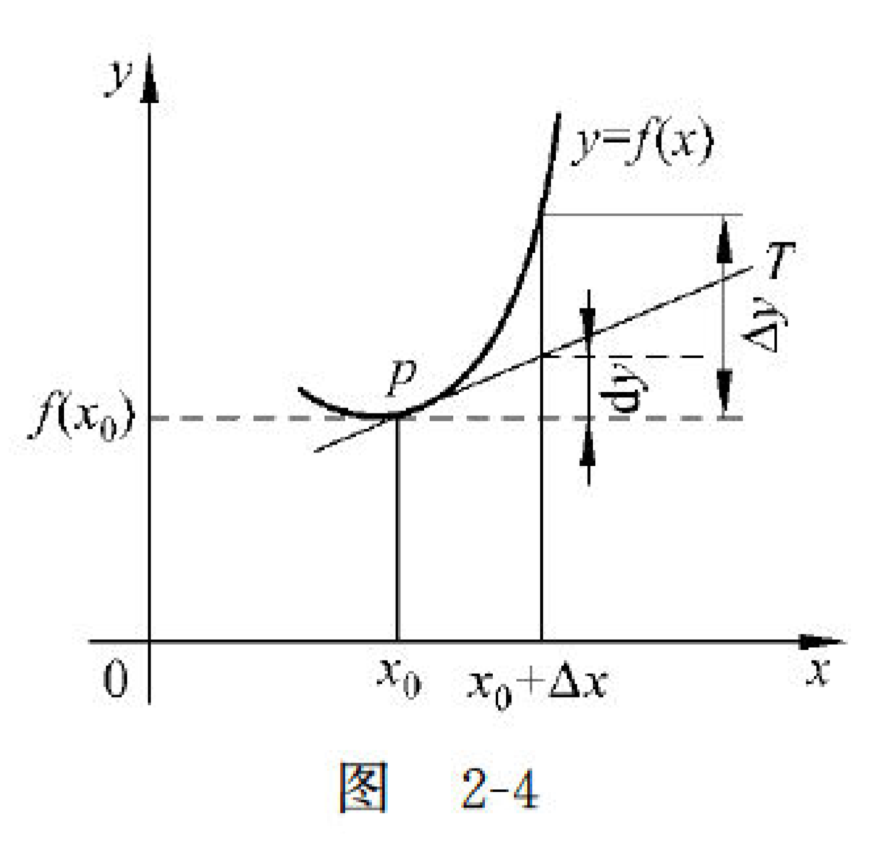


图　2-4

2.3.2　微分的基本公式

基本初等函数的微分公式如下。

$\mathrm{d}(C)=0$（C 为常数）　　$\mathrm{d}(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$　　$\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$　　$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$　　$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$ $\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\cdot\tan x\mathrm{d}x$ $\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cdot\cot x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ $\mathrm{d}(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ $\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x)=-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

2.3.3 微分的运算法则

1. 和、差、积、商的微分法则

(1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$

(2) $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$

(3) $\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$($C$ 为常数)

(4) $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}(v\neq 0)$

(5) $\mathrm{d}\left(\frac{C}{u}\right)=-\frac{C\mathrm{d}u}{u^2}$($C$ 为常数)

2. 复合函数的微分法则

设函数 $y=f(u)$,根据微分的定义,当 u 是自变量时,函数的微分为

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$$

如果 u 不是自变量,而是 x 的可导函数 $u=\varphi(x)$,由复合函数的求导法知

$$y' = f'(u)\varphi'(x)$$

则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的微分为

$$\mathrm{d}y = f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

因为 $u=\varphi(x)$的微分为

$$\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

所以

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$$

由此可见,不论 u 是自变量还是中间变量,函数 $y=f(u)$的微分总保持同一形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$,这一性质称为**一阶微分形式不变性**。

【例 2-19】 求函数 $y=\ln\sin x$ 的微分。

解法 1:$\mathrm{d}y=(\ln\sin x)'\mathrm{d}x=\frac{1}{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=\cot x\mathrm{d}x$

解法 2:$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\ln\sin x)=\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}\sin x=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\mathrm{d}x=\cot x\mathrm{d}x$

【例 2-20】 求函数 $y=\sin\sqrt{x}$的微分。

解法 1:$\mathrm{d}y=(\sin\sqrt{x})'\mathrm{d}x=\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解法 2:$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\sin\sqrt{x})=\cos\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x}=\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

2.3.4　微分在近似计算中的应用

1. 计算函数增量的近似值

当函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，$f'(x_0)\neq 0$，且$|\Delta x|$很小时，有近似计算公式：

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

【例 2-21】　一批半径为 1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度为 0.01cm，估计每只球需用多少克铜(铜的密度 $\gamma=8.9\mathrm{g/cm^3}$)？

解：设球的体积为 V，半径为 r，则

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V' = 4\pi r^2$$

取 $r_0=1$，$\Delta r=0.01$，由于 Δr 很小，由公式得镀层的体积为

$$\Delta V \approx V'(r_0)\Delta r = 4\pi \times 1^2 \times 0.01 \approx 0.13\mathrm{cm^3}$$

所以，每只球需用铜约为 $8.9\times 0.13\approx 1.16$g。

2. 计算函数在点 x_0 附近的函数值的近似值

由 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$ 得近似公式

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

特别地，令 $x_0=0$，$\Delta x=x$，有 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$。

【例 2-22】　计算 $\sqrt[3]{8.02}$的近似值。

解：设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，取 $x_0=8$，$\Delta x=0.02$，由公式得

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8.02} &= f(8+0.02) \approx f(8) + f'(8)\times 0.02 \\ &= \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3}\times 8^{-\frac{2}{3}} \times 0.02 = 2.0017\end{aligned}$$

当$|x|$很小时，还可得到工程上常用的近似公式(其中角 x 以弧度作为单位)：

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$　　(2) $\sin x\approx x$　　(3) $\tan x\approx x$

(4) $\ln(1+x)\approx x$　　(5) $\mathrm{e}^x\approx 1+x$　　(6) $\arcsin x\approx x$

【例 2-23】　计算 $\mathrm{e}^{-0.005}$的近似值。

解：应用近似公式 $\mathrm{e}^x\approx 1+x$，得 $\mathrm{e}^{-0.005}\approx 1-0.005=0.995$。

应用模块 2.3

应用 1　【薄片面积的增量】一块正方形金属薄片受温度影响，其边长 x 由 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$，问薄片的面积 $A(x)=x^2$ 约改变了多少？

解：当边长 x 由 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时，面积 A 的增量为

$$\Delta A = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

可见 ΔA 由两部分组成：第一部分是 $2x_0\Delta x=A'(x_0)\Delta x$，即函数 $A(x)=x^2$ 在点 x_0 处的微分；第二部分是$(\Delta x)^2$，当 Δx 很小时，$(\Delta x)^2$ 比第一部分小得多。所以，当$|\Delta x|$很

小时，$\Delta A \approx A'(x_0)\Delta x$。

应用 2 【路程的近似值】在自由落体运动中，求物体由时刻 t 到 $t+\Delta t$ 所经过的路程的近似值。

解：自由落体运动中，路程 s 与时间 t 的关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，当时刻 t 到 $t+\Delta t$ 时，路程 s 相应的增量

$$\Delta s = \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

可见 Δs 也由两部分组成，第一部分是 $gt\Delta t = s'(t)\Delta t$；第二部分是 $\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$，当 Δt 很小时，第二部分也比第一部分小得多，所以 $\Delta s \approx s'(t)\Delta t$。

应用 3 【收入核算】飞龙计算机软件公司开发新型的软件程序，若 x 为公司一个月的产量，则收入函数为 $R=36x-\frac{x^2}{20}$（单位：百元），如果公司 2005 年 12 月份的产量从 250 套增加到 260 套，请估计公司 12 月份收入增加了多少？

解：公司 12 月份产量的增加量为 $\Delta x=260-250=10$（套），用 $\mathrm{d}R$ 来估计 12 月份收入的增加量

$$\Delta R \approx \mathrm{d}R = \left(36x - \frac{x^2}{20}\right)'\Delta x\bigg|_{x=250,\Delta x=10}$$

$$= \left(36 - \frac{x}{10}\right)\Delta x\bigg|_{x=250,\Delta x=10} = 110(\text{百元})$$

即该公司 2005 年 12 月份的收入大约增加了 11 000 元。

应用 4 【热胀冷缩】某一机械挂钟的钟摆的周期为 1s，在冬季摆长因热胀冷缩而缩短了 0.01cm，已知单摆的周期为 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 $g=980\text{cm/s}^2$，问这只钟每秒大约变化了多少？

解：因为钟摆的周期为 $T=1$，所以有 $1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，解之得摆长 $l=\frac{g}{(2\pi)^2}$，又因为摆长的改变量 $\Delta l=-0.01\text{cm}$，$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l}=\pi\frac{1}{\sqrt{gl}}$，用 $\mathrm{d}T$ 近似计算 ΔT，得

$$\Delta T \approx \mathrm{d}T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l}\Delta l = \pi\frac{1}{\sqrt{gl}}\Delta l$$

将 $l=\frac{g}{(2\pi)^2}$，$\Delta l=-0.01$ 代入上式得

$$\Delta T \approx \mathrm{d}T = \pi\frac{1}{\sqrt{gl}}\Delta l = \frac{\pi}{\sqrt{g\frac{g}{(2\pi)^2}}} \times (-0.01)$$

$$= \frac{2\pi^2}{g} \times (-0.01) \approx -0.0002(\text{s})$$

因此，由于摆长缩短了 0.01cm，使得钟摆的周期相应地减少了约 0.0002s，所以这只钟每秒快了 0.0002s。

实践模块 2.3

A 组(基础训练)

1. 填空题。

(1) d(　　)$=2\mathrm{d}x$　　(2) d(　　)$=3x\mathrm{d}x$

(3) d(　　)$=\cos t\mathrm{d}t$　　(4) d(　　)$=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

2. 求下列函数的微分。

(1) $y=\dfrac{x^7}{7}-\cos x+3^x$　　(2) $y=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4$

(3) $y=\sqrt{x}\ln x$　　(4) $y=x\ln x-x$

(5) $y=\dfrac{\sin x}{x}$　　(6) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

B 组(能力提高训练)

1. 求下列函数的微分。

(1) $y=\mathrm{e}^{ax+bx^2}$　　(2) $y=\sin ax\cos bx$

(3) $y=\ln\tan x$　　(4) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

2. 计算 $\sqrt[3]{1010}$的近似值。

3. 有一半径为 R 的铁球,镀上 0.01cm 厚的银,问大约用多少体积的银?

本 章 小 结

1. 主要内容

导数和微分的概念及几何意义;导数和微分的运算法则;复合函数、隐函数和对数函数的求导方法;高阶导数;微分在近似计算中的应用。

2. 方法要点

(1) 利用导数的定义求导数和一些特殊形式的极限。

(2) 利用导数的几何意义求切线和法线方程。

(3) 利用求导公式和运算法则求导数。

(4) 利用复合函数求导法则求导数。

(5) 利用微分公式和法则求微分。

(6) 利用公式和法则求隐函数的导数和高阶导数。

(7) 利用对数求导法求函数的导数。

(8) 利用左、右导数判定函数在某一点的可导性。

阅读材料 2　微积分的产生和发展

微积分(Calculus)是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支。微积分是建立在实数、函数和极限的基础上的。微积分最重要的思想就是用“微元”与“无限逼近”,即一个事物始终在变化是不好研究的,但通过微元分割成一小块一小块,那就可以认为是常量处理,最终加起来就行。

微积分学是微分学和积分学的总称。它是一种数学思想,“无限细分”就是微分,“无限求和”就是积分。无限就是极限,极限的思想是微积分的基础,它是用一种运动的思想看待问题。比如,子弹飞出枪膛的瞬间速度就是微分的概念,子弹每个瞬间所飞行的路程之和就是积分的概念。如果将整个数学比作一棵大树,那么初等数学是树的根,名目繁多的数学分支是树枝,而树干的主要部分就是微积分。微积分堪称是人类智慧最伟大的成就之一。

极限和微积分的概念可以追溯到古代。到了 17 世纪后半叶,牛顿和莱布尼茨完成了许多数学家都参加过准备的工作,分别独立地建立了微积分学。他们建立微积分的出发点是直观的无穷小量,理论基础是不牢固的。直到 19 世纪,柯西和维尔斯特拉斯建立了极限理论,康托尔等建立了严格的实数理论,这门学科才得以严密化。

微积分是与实际应用联系着发展起来的,它在天文学、力学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学等多个分支中,有越来越广泛的应用。特别是计算机的发明更有助于这些应用的不断发展。

微分和积分的思想早在古代就已经产生了。公元前 3 世纪,古希腊的阿基米德在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的问题中,就隐含着近代积分学的思想。作为微分学基础的极限理论来说,早在古代以有比较清楚的论述。比如我国的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中,记有“一尺之棰,日取其半,万世不竭”。三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细,所失弥小,割之又割,以至于不可割,则与圆周和体而无所失矣。”这些都是朴素的也是很典型的极限概念。

到了 17 世纪,有许多科学问题需要解决,这些问题也就成了促使微积分产生的因素。归结起来,大约有四种主要类型的问题:第一类是研究运动的时候直接出现的,也就是求即时速度的问题;第二类问题是求曲线的切线的问题;第三类问题是求函数的最大值和最小值问题;第四类问题是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力。

17 世纪的许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题做了大量的研究工作,如法国的费马、笛卡儿、罗伯瓦、笛沙格;英国的巴罗、瓦里士;德国的开普勒;意大利的卡瓦列利等人都提出许多很有建树的理论,为微积分的创立做出了贡献。

17 世纪下半叶,在前人工作的基础上,英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作,虽然这只是初步的工作。他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起,一个是切线问题(微分学的中心问题),一个是求积问题(积分学的中心问题)。

牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量,因此这门学科早期也称为无穷小分析,这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源。牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑,莱布尼茨却是侧重于几何学来考虑的。

牛顿在 1671 年写了《流数法和无穷级数》,这本书直到 1736 年才出版,它在这本书里指出,变量是由点、线、面的连续运动产生的,否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止集合。他把连续变量叫作流动量,把这些流动量的导数叫作流数。牛顿在流数术中所提出的中心问题是:已知连续运动的路径,求给定时刻的速度(微分法);已知运动的速度求给定时间内经过的路程(积分法)。

德国的莱布尼茨是一个博才多学的学者。1684 年,他发表了现在世界上认为是最早的微积分文献,这篇文章有一个很长而且很古怪的名字:《一种求极大极小和切线的新方法,它也适用于分式和无理量,以及这种新方法的奇妙类型的计算》。就是这样一篇说理也颇含糊的文章,却有划时代的意义。它已含有现代的微分符号和基本微分法则。1686 年,莱布尼茨发表了第一篇积分学的文献。他是历史上最伟大的符号学者之一,他所创设的微积分符号远远优于牛顿的符号,这对微积分的发展有极大的影响。现在我们使用的微积分通用符号就是当时莱布尼茨精心选用的。

微积分学的创立,极大地推动了数学的发展,过去很多初等数学束手无策的问题,运用微积分往往迎刃而解,由此可见微积分学的非凡威力。历史的事实是,牛顿和莱布尼茨总结了前人的工作,各自独立完成了这空前的盛业。牛顿约早 10 年开始,而莱布尼茨约早 3 年公布。但由于狭隘的民主偏见,竟引起了绵延一百多年的所谓发明优先权的争端。结果使英国的微积分发展推迟了若干年。直到 19 世纪初,法国科学学院的科学家以柯西为首,对微积分的理论进行了认真研究,建立了极限理论,后来又经过德国数学家维尔斯特拉斯进一步严格化,使极限理论成为微积分的坚定基础,才使微积分进一步发展起来。

微积分的历史,17 世纪是始创,18 世纪是充实和发扬,19 世纪则是回顾、推广和改革,并以崭新的姿态进入 20 世纪。

综合实训 2

1. 选择题。

(1) 如果函数 $f(x)$在点 x 可导,则 $f'(x)=($　　$)$。

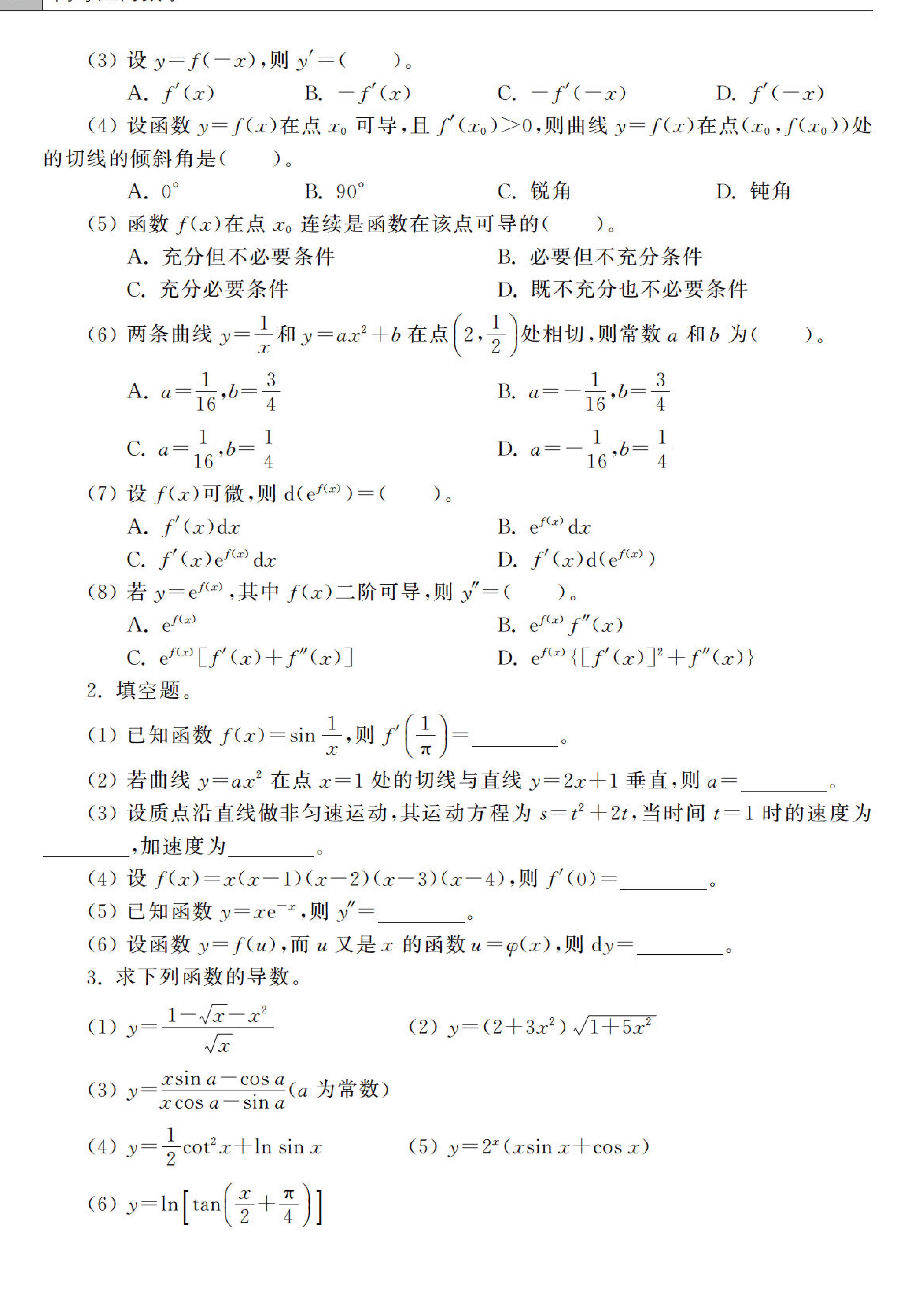
A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{h}$　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{2h}$

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}$　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

(2) 设 $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-a^2}$,那么 $y'=($　　$)$。

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-a^2}}$　　B. $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$

C. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$　　D. $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$



(3) 设 $y=f(-x)$，则 $y'=$(　　)。

A. $f'(x)$　　B. $-f'(x)$　　C. $-f'(-x)$　　D. $f'(-x)$

(4) 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)>0$，则曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的倾斜角是(　　)。

A. $0°$　　B. $90°$　　C. 锐角　　D. 钝角

(5) 函数 $f(x)$在点 x_0 连续是函数在该点可导的(　　)。

A. 充分但不必要条件　　B. 必要但不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(6) 两条曲线 $y=\frac{1}{x}$和 $y=ax^2+b$ 在点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$处相切，则常数 a 和 b 为(　　)。

A. $a=\frac{1}{16},b=\frac{3}{4}$　　B. $a=-\frac{1}{16},b=\frac{3}{4}$

C. $a=\frac{1}{16},b=\frac{1}{4}$　　D. $a=-\frac{1}{16},b=\frac{1}{4}$

(7) 设 $f(x)$可微，则 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{f(x)})=$(　　)。

A. $f'(x)\mathrm{d}x$　　B. $\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$

C. $f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$　　D. $f'(x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{f(x)})$

(8) 若 $y=\mathrm{e}^{f(x)}$，其中 $f(x)$二阶可导，则 $y''=$(　　)。

A. $\mathrm{e}^{f(x)}$　　B. $\mathrm{e}^{f(x)}f''(x)$

C. $\mathrm{e}^{f(x)}[f'(x)+f''(x)]$　　D. $\mathrm{e}^{f(x)}\{[f'(x)]^2+f''(x)\}$

2. 填空题。

(1) 已知函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，则 $f'\left(\frac{1}{\pi}\right)=$________。

(2) 若曲线 $y=ax^2$ 在点 $x=1$ 处的切线与直线 $y=2x+1$ 垂直，则 $a=$________。

(3) 设质点沿直线做非匀速运动，其运动方程为 $s=t^2+2t$，当时间 $t=1$ 时的速度为________，加速度为________。

(4) 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则 $f'(0)=$________。

(5) 已知函数 $y=x\mathrm{e}^{-x}$，则 $y''=$________。

(6) 设函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，则 $\mathrm{d}y=$________。

3. 求下列函数的导数。

(1) $y=\frac{1-\sqrt{x}-x^2}{\sqrt{x}}$　　(2) $y=(2+3x^2)\sqrt{1+5x^2}$

(3) $y=\frac{x\sin a-\cos a}{x\cos a-\sin a}$($a$ 为常数)

(4) $y=\frac{1}{2}\cot^2x+\ln\sin x$　　(5) $y=2^x(x\sin x+\cos x)$

(6) $y=\ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

4. 求下列函数的二阶导数。

(1) $y=\ln(1+x^2)$　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(3) $y=(1+x^2)\arctan x$　　(4) $y=\ln[f(x)]$

5. 在抛物线 $4y=x^2-x+1$ 上,哪一点的切线与 $y=x$ 平行?哪一点的切线是水平的?

6. 正方体的棱长为10m,如果棱长增加0.1m,试求体积改变量的近似值。

第 3 章

导数的应用

微分学的基本概念产生于相关的物理问题及几何问题，同时它们在工程技术、经济管理、生活等各个领域有着广泛的应用。本章将在第 2 章导数概念的基础上进一步研究函数及函数曲线的某些重要特性。

知识模块 3.1　洛必达法则

学习任务

【知识目标】

掌握洛必达法则。

【能力目标】

能运用洛必达法则求不定式和可化为不定式的极限。

【学习重点】

洛必达法则。

【学习难点】

洛必达法则的应用。

如果函数$\frac{f(x)}{g(x)}$当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，其分子、分母都趋于零或趋于无穷大，那么$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$可能存在，也可能不存在，通常称这种极限为未定式，并分别简记为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型。这节将介绍一种计算未定式极限的有效方法——洛必达法则。

3.1.1　$\frac{0}{0}$型未定式

洛必达法则 1　设 $f(x)$，$g(x)$在点 x_0 的左右近旁可导，且 $g'(x)\neq 0$，又满足条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$。

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为无穷大）。

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

注：如果把极限过程换成 $x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 或 $x \to \infty$，则只需相应改动洛必达法则1的条件，结论仍然成立。

【例 3-1】 求 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$。

解：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由洛必达法则得

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2-3x+2)'}{(x^3-1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{2x-3}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

【例 3-2】 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x}$。

解：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由洛必达法则得

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{arccot} x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{1+x^2}} = 1$$

如果利用洛必达法则之后所得到的极限仍是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，且满足洛必达法则的条件，则可继续使用法则。

【例 3-3】 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$。

解：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

3.1.2 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

洛必达法则 2 设 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 的左右近旁可导，且 $g'(x) \neq 0$，又满足条件：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$。

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大）。

则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

注：如果把极限过程换成 $x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 或 $x \to \infty$，则只需相应改动法则2的条件，结论仍然成立。

【例 3-4】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ $(n>0)$。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$

【例 3-5】 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$。

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-6\cos 3x\sin 3x}{-6\cos x\sin x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3$$

3.1.3 其他类型的未定式

未定式还有另外五种形式：$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、1^∞、0^0、∞^0。它们都可以通过适当变形，转化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，然后用洛必达法则求解。

【例 3-6】 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cot 2x$。

解：这是 $0\cdot\infty$型未定式，将其变形为$\dfrac{0}{0}$型，然后使用洛必达法则。

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\cot 2x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sec^2 2x}=\frac{1}{2}$$

【例 3-7】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$。

解：这是$\infty-\infty$型，将其变形为$\dfrac{0}{0}$型，然后使用洛必达法则。

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

因为 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，所以 1^∞、0^0、∞^0 型皆可化为 $0\cdot\infty$型。

【例 3-8】 求 $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$。

解：这是 1^∞型未定式

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}-\frac{1}{x}}=e^{-1}$$

在使用洛必达法则时，应注意如下几点。

(1) 由于洛必达法则只适用于$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，所以每次在使用洛必达法则之前，必须先检验极限是否属于$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，如果不是这两种未定式就不能直接使用该法则。

(2) 如果有可约因子，或有非零极限的乘积因子，则可先约去或提出，然后再利用洛必达法则，以简化演算步骤。

（3）当 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在时$\left(不包括 \lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty\right)$，并不能断定 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$不存在，此时应使用其他方法求极限。

例如，$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$，因为 $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在，所以，$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$也不存在，因此$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$不能用洛必达法则求出。正确的解法是：

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=1\times0=0$$

（4）洛必达法则针对$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式也不是万能的，例如：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

即使用两次洛必达法则后，又回到了原式。因此，洛必达法则并不能简化计算这个函数极限的过程。实际上

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

因此，对于满足洛必达法则条件的某些极限来说，不能一味地使用该法则，而忽略了其他更好的方法。

应用模块 3.1

应用　【巨石陨落】质量为 m 的巨石从静止开始下落，考虑空气阻力，t 秒后它的速度的数学模型为：

$$v=\frac{mg}{c}=(1-\mathrm{e}^{-\frac{ct}{m}})$$

其中，g 为重力加速度；c 为正常数。问该巨石下落的速度将会怎样？

解：巨石的质量可视为 $m\to\infty$，则由洛必达法则

$$\lim_{m\to\infty}v=\lim_{m\to\infty}\frac{mg}{c}=\lim_{m\to\infty}(1-\mathrm{e}^{-\frac{ct}{m}})=\frac{g}{c}\lim_{m\to\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-\frac{ct}{m}}\frac{ct}{m^2}}{-\frac{1}{m^2}}=\frac{g}{c}ct\lim_{m\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{ct}{m}}=gt$$

即空气阻力对巨石不起作用，该巨石下落速度为自由落体的下落速度。

实践模块 3.1

A 组（基础训练）

用洛必达法则求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$

(4) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$

B 组（能力提高训练）

用洛必达法则求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{x^2}{e^{5x}}$

(4) $\lim\limits_{x \to 0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$

(5) $\lim\limits_{x \to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 3x}$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{x}$

(7) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x)$

(8) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

(9) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sin x}$

(10) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$

知识模块 3.2 函数的单调性与曲线的凹凸性

学习任务

【知识目标】

(1) 理解函数单调性的概念及凹凸性和拐点的概念。

(2) 掌握用导数判断函数单调性的方法。

(3) 掌握利用导数判断函数图形的凹凸性和拐点的方法。

【能力目标】

(1) 能运用导数判断函数的单调性。

(2) 能利用导数判断函数图形的凹凸性和拐点。

【学习重点】

能运用导数判断函数的单调性及函数图形的凹凸性和拐点。

【学习难点】

函数图形的描绘。

3.2.1　函数的单调性

函数的单调性是函数的一个重要特性，如图 3-1 所示，由函数图形可以看出，如果函数 $f(x)$在某区间上单调增加，则它的图形是随 x 增大而上升的曲线，此时，曲线上任一点处的切线与 x 轴正向夹角为锐角，即 $f'(x)>0$；同理，如果函数 $f(x)$在某区间上单调减少，则曲线上任一点处的切线与 x 轴正向夹角为钝角，即 $f'(x)<0$，如图 3-2 所示。

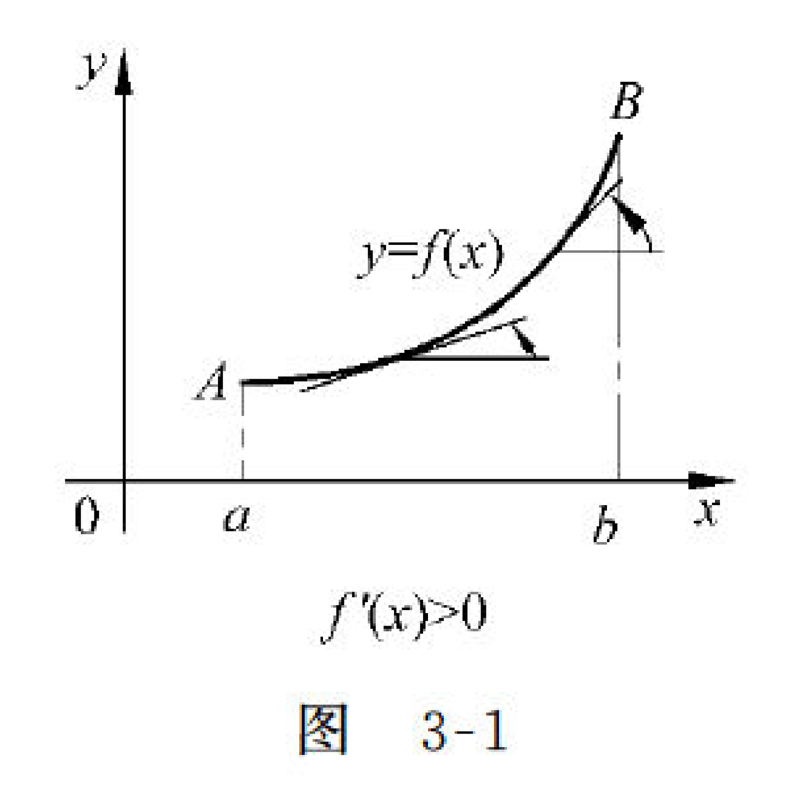


图　3-1

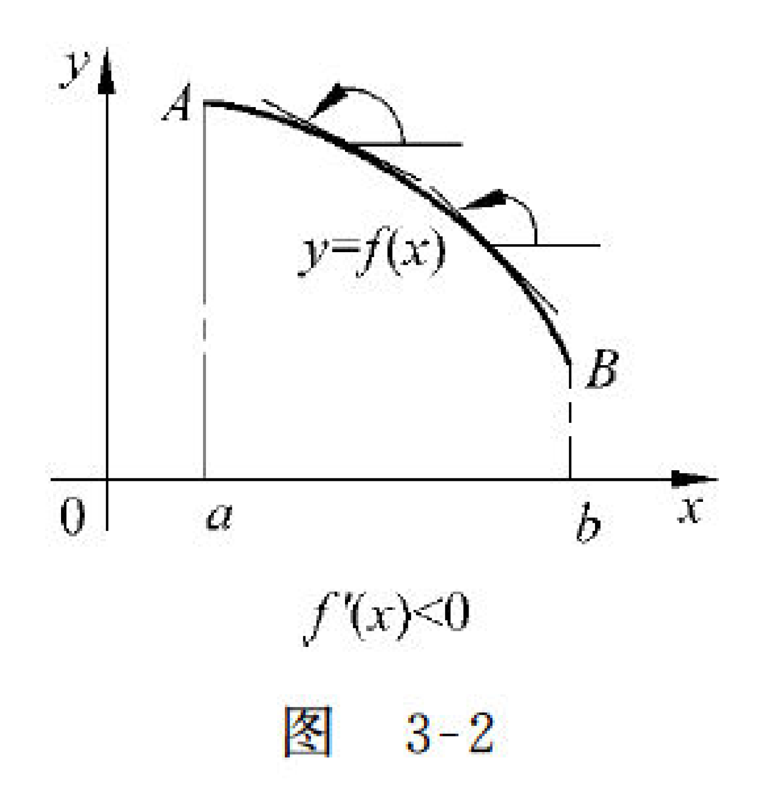


图　3-2

因此，依据导数的符号，可以判定函数 $f(x)$在某一区间的单调性。

定理 3-1　设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)内可导，则

(1) 如果在(a,b)内恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加。

(2) 如果在(a,b)内恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在$[a,b]$上单调减少。

注：

(1) 定理 3-1 适用于其他各种区间。

(2) 若 $f'(x)$在某区间内的有限个点处为零，其余各点处均为正(或负)时，则函数在该区间上仍旧是单调增加(或减少)的。

【例 3-9】　判定函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的单调性。

解：因为 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续，且在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内 $y'=\cos x>0$，所以函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加。

【例 3-10】　判定函数 $f(x)=x^3$ 的单调性。

解：函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=3x^2\geqslant 0$，且只有 $f'(0)=0$。

因此，函数 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调增加。

【例 3-11】　讨论函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$的单调性。

解：函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

当 $x\neq 0$ 时，$y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$。

当 $x=0$ 时，函数的导数不存在，其余各点处恒有 $y'>0$，从而函数在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的。

因此，确定函数 $y=f(x)$单调性的一般步骤如下。

(1) 求出函数的定义域。

(2) 求导数 $f'(x)$，找出使 $f'(x)=0$ 的点及 $f'(x)$不存在的点。

(3) 用这些点将函数的定义域分成若干个部分区间。

(4) 判定 $f'(x)$在每个区间上的符号，从而确定函数在这些区间上的单调性。

【例 3-12】 求函数 $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$ 的单调区间。

解：函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

$$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=6(x+1)(x-3)$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=3$。

用这两个点将 $f(x)$的定义域分成三部分区间，列表讨论，见表 3-1。

表 3-1 $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$ 的单调区间

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

由表 3-1 知，函数在$(-\infty,-1)$及$(3,+\infty)$区间内单调增加，在$(-1,+3)$区间内单调减少。

3.2.2 曲线的凹凸性和拐点

1. 曲线的凹凸定义和判定法

定义 3-1 在某区间内，如果曲线弧位于其上任一点处的切线的上方，则称曲线在该区间内是凹的；如果曲线弧位于其上任一点处的切线的下方，则称曲线在该区间内是凸的，如图 3-3 所示。

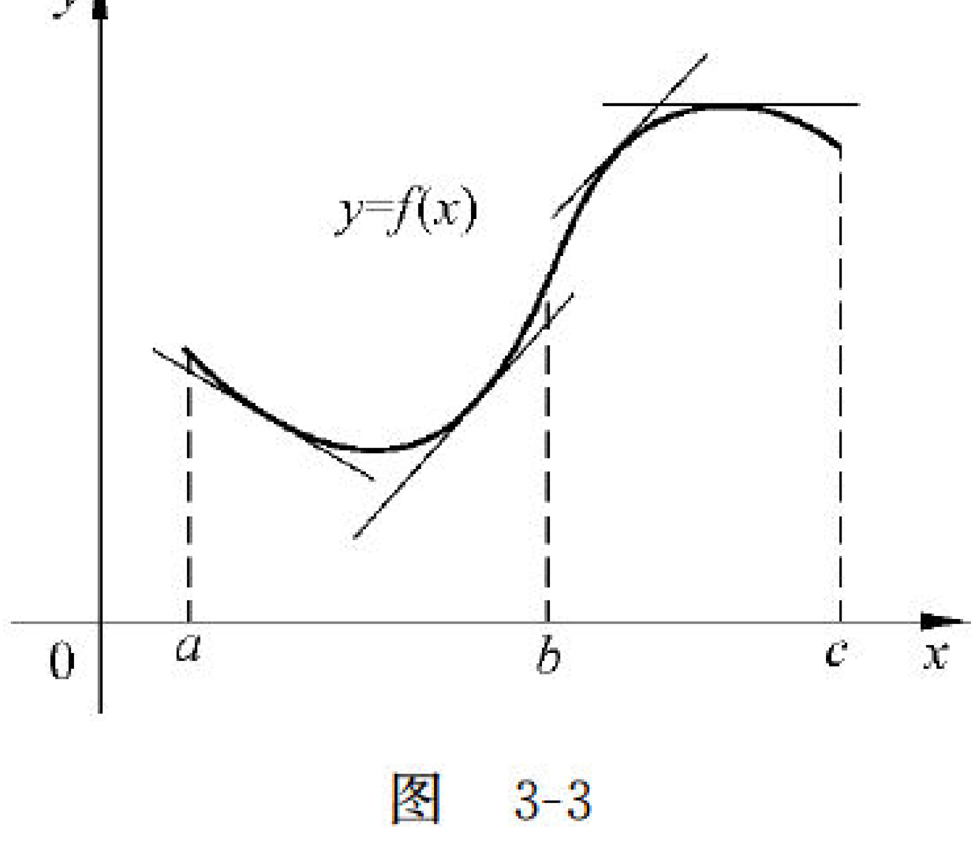
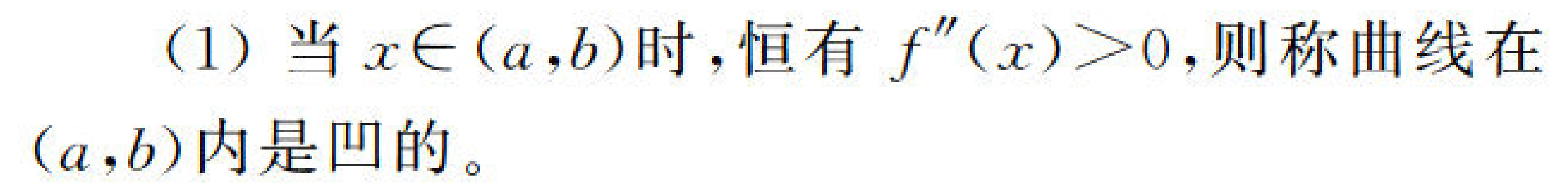


图 3-3

在凹弧段曲线上，切线的斜率从左至右在增大，即函数的导数单调增加，因而 $f''(x)>0$；同样，在凸弧段曲线上，切线的斜率从左至右减少，即函数的导数单调减少，因而 $f''(x)<0$。于是，有如下定理：

定理 3-2 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内具有二阶导数。



(1) 当 $x\in(a,b)$时，恒有 $f''(x)>0$，则称曲线在(a,b)内是凹的。



(2) 当 $x\in(a,b)$时，恒有 $f''(x)<0$，则称曲线在(a,b)内是凸的。

【例 3-13】 判断曲线 $y=x^4+5x^2$ 的凹凸性。

解：$y'=4x^3+10x$，$y''=12x^2+10$，在$(-\infty,+\infty)$恒有 $y''>0$，故曲线 $y=x^4+5x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$为凹的。

【例 3-14】 判定曲线 $y=\dfrac{1}{x}$的凹凸性。

解：$y'=-\dfrac{1}{x^2}$，$y''=\dfrac{2}{x^3}$

当 $x\in(-\infty,0)$时，$y''=\frac{2}{x^3}<0$，故曲线在$(-\infty,0)$为凸的。

当 $x\in(0,+\infty)$时，$y''=\frac{2}{x^3}>0$，故曲线在$(0,\infty)$为凹的。

2. 曲线的拐点及求法

定义 3-2　连续曲线上凹与凸的分界点称为曲线的拐点，求拐点的方法为：

(1) 求出函数 $y=f(x)$的定义域。

(2) 求 $f''(x)$，令 $f''(x)=0$，求出使 $f''(x)=0$ 的点及 $f''(x)$不存在的点。

(3) 用上面这些点将定义域分为若干个部分区间。

(4) 判定 $f''(x)$在每个区间上的符号，从而确定曲线的凹凸性，凹凸的分界点为拐点。

【例 3-15】　求曲线 $y=x^4-2x^3+1$ 的凹凸区间及拐点。

解：(1) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

(2) $y'=4x^3-6x^2$，$y''=12x^2-12x=12x(x-1)$

令 $y''=0$，得 $x_1=0$，$x_2=1$。

(3) 列表讨论(∪表示凹的，∩表示凸的)，见表 3-2。

表 3-2　例 3-15 列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	+	0	−	0	+
y	∪	拐点 $(0,1)$	∩	拐点 $(1,0)$	∪

由上可知，$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$为凹区间，$(0,1)$为凸区间；点$(0,1)$及$(1,0)$为曲线的拐点。

应用模块 3.2

应用　【工作效率】对某企业员工的工作效率研究表明，一个班次(8 小时)的中等水平员工早上 8:00 开始工作，t 小时后生产的效率为

$$Q(t)=-t^3+9t^2+12t$$

试讨论该班次何时工作效率是提高的、何时工作效率又是下降的。

解：工作效率由函数 $Q(t)=-t^3+9t^2+12t$ 决定，其提高与下降即为函数的单调增加与单调减少，本问题的讨论范围是$[0,8]$。

由 $Q'(t)=-3t^2+18t+12=-3(t^2-6t-4)=0$，得 $t=3+\sqrt{13}$ (负值舍去)。

当 $0<t<3+\sqrt{13}$ 时，$Q'(t)>0$，即工作效率是提高的。

当 $3+\sqrt{13}<t<8$ 时，$Q'(t)<0$，即工作效率是下降的。

实践模块 3.2

A 组（基础训练）

1. 填空题。

(1) 函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$在区间________是单调减少的。

(2) 函数 $y=x^3+12x+1$ 在定义域内单调________。

2. 求下列函数的单调区间。

(1) $f(x)=x^3+2x$　　(2) $f(x)=2x^3+3x^2-12x$

(3) $f(x)=\arctan x-x$　　(4) $f(x)=2x+\frac{8}{x}$

B 组（能力提高训练）

1. 求下列函数的单调区间。

(1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

2. 求下列函数的凹凸区间及拐点。

(1) $y=x^4-6x^3+12x^2-10$　　(2) $y=x\ln x$

(3) $y=xe^x$　　(4) $y=\ln(1+x^2)$

3. 已知曲线 $y=ax^3+bx^2+x+2$ 有一个拐点$(-1,3)$，求 a 和 b 的值。

知识模块 3.3　函数的极值与最值

学习任务

【知识目标】

(1) 理解函数极值的概念。

(2) 掌握用导数判断函数极值的方法。

【能力目标】

(1) 能够运用导数求函数的极值。

(2) 能够求解最大值和最小值的应用问题。

【学习重点】

利用导数求函数的极值。

【学习难点】

最大值和最小值的应用问题。

3.3.1　函数的极值

定义 3-3　设函数 $f(x)$在点 x_0 及其近旁有定义，若对于点 x_0 近旁的任意点 $x(x\neq x_0)$，均有 $f(x)<f(x_0)$（或 $f(x)>f(x_0)$），则称 $f(x_0)$是 $f(x)$的一个极大值（或极小值），称点 x_0 为 $f(x)$的一个极大值点（或极小值点）。函数的极大值与极小值统称为极值，极大值点和极小值点统称为极值点。

如图 3-4 所示，$f(c_1)$和 $f(c_4)$为函数 $y=f(x)$的极大值，点 c_1 和 c_4 为极大值点；$f(c_2)$和 $f(c_5)$为极小值，点 c_2 和 c_5 为极小值点。

图　3-4

从图 3-4 中可以看出。

（1）极值是局部概念。

（2）可导函数在取得极值处有水平切线。

于是有下面定理。

定理 3-3　（**极值的必要条件**）若函数 $f(x)$在点 x_0 处可导且取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$。

定义 3-4　使 $f'(x_0)=0$ 的点称为函数 $f(x)$的驻点。

注：

（1）驻点不一定是极值点，例如 $x=0$ 是 $y=x^3$ 的驻点，但不是极值点。

（2）极值点也不一定是驻点，例如 $x=0$ 是 $y=|x|$的极值点，但不是驻点。

定理 3-4　（**极值的第一充分条件**）设 $f(x)$在点 x_0 及其左右近旁连续、可导（x_0 可以除外），如果

（1）当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，则 x_0 是极大值点。

（2）当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则 x_0 是极小值点。

（3）在 x_0 的两侧 $f'(x)$不变号，则 x_0 不是极值点。

求函数 $y=f(x)$的极值和极值点的步骤如下。

（1）求出函数的定义域。

（2）求出 $f'(x)$，令 $f'(x)=0$ 求出所有的驻点及 $f'(x)$不存在的点。

（3）以驻点和不可导点为分界点，将定义域划分为若干区间，列表讨论 $f'(x)$的符号，根据定理 3-3 判定极值点，并求出极值。

【例 3-16】　求函数 $y=2x^3-3x^2$ 的极值。

解：（1）函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

（2）$y'=6x^2-6x=6x(x-1)$，令 $y'=0$，得 $x_1=0$，$x_2=1$，无不可导点。

（3）列表讨论，详见表 3-3。

表 3-3　$y=2x^3-3x^2$ 的极值

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	极大值 0	↘	极小值−1	↗

由表 3-3 可知，函数在 $x=0$ 点取得极大值为 0，在 $x=1$ 点取得极小值为−1。

【例 3-17】 求 $y=x-\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间和极值。

解：(1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

(2) $y'=1-(x-2)^{-\frac{1}{3}}$，令 $y'=0$ 得驻点 $x=3$，$x=2$ 为 y' 不存在的点。

(3) 列表讨论，详见表 3-4。

表 3-4 $y=x-\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间和极值

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y	↗	极大值 2	↘	极小值 $\frac{3}{2}$	↗

由表 3-4 可知，函数在 $x=2$ 点取得极大值为 2，在 $x=3$ 点取得极小值为 $\frac{3}{2}$。

定理 3-5 （极值的第二充分条件）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，x_0 为 $f(x)$ 的极大值点。

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，x_0 为 $f(x)$ 的极小值点。

【例 3-18】 求函数 $f(x)=x^3-3x$ 的极值。

解：$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=-1$，$x_2=1$。

$f''(x)=6x$。

$f''(-1)=-6<0$，此时函数有极大值 $f(-1)=2$。

$f''(1)=6>0$，此时函数有极小值 $f(1)=-2$。

3.3.2 闭区间[a,b]上连续函数的最大值与最小值

由闭区间上连续函数的性质可知，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则其一定存在最大值和最小值，而这些点只能在区间 (a,b) 内部或区间端点处取得。因此：

(1) 先求出 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的所有驻点和不可导点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。

(2) 比较函数值 $f(a),f(x_1),\cdots,f(x_n),f(b)$ 的大小，其中最大的就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，最小的就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值。

【例 3-19】 求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-14$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最大值和最小值。

解：$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-2$，$x_2=1$

比较 $f(-3)=-5$，$f(-2)=6$，$f(1)=-21$，$f(3)=31$

所以，函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(3)=31$，最小值为 $f(1)=-21$。

注：当连续函数在某个开区间（或无穷区间）上只有一个极值点时，那么这个极值点就是函数的最大值（或最小值）点。

应用模块 3.3

应用 1　【最大容积】用一边长为 a 的正方形铁皮，在四角上各剪去一块面积相等的小正方形，做成无盖方盒，问剪去的小正方形边长为多少时，做出的无盖方盒容积最大？

解：设剪去的小正方形的边长为 x（即铁盒的高），则铁盒底边长为 $a-2x$，它的容积为 V，则

$$V=V(x)=x(a-2x)^2,\quad x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$$

所以

$$V'(x)=a^2-8ax+12x^2$$

令 $V'(x)=0$，得驻点 $x_1=\frac{a}{2}$，$x_2=\frac{a}{6}$。

由于在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 内只有一个驻点，因此，当 $x=\frac{a}{6}$，即剪去的小正方形边长为 $\frac{a}{6}$ 时，做出的无盖方盒容积最大为 $\frac{2}{27}a^3$。

应用 2　【输出功率】图 3-5 所示为稳压电源回路，电动势为 ε，内阻为 r，负载电阻为 R，问 R 取多大时，输出功率最大？

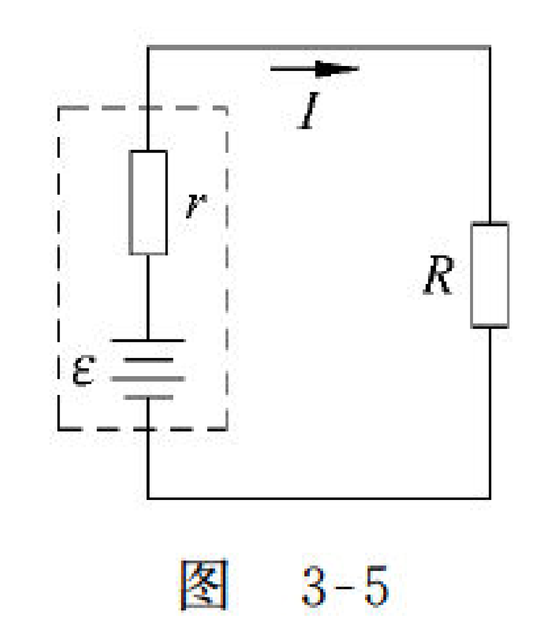


图　3-5

解：由电学知识可知，消耗在负载电阻 R 上的功率为

$$P=I^2R$$

其中 I 为回路中的电流，又由欧姆定律可知

$$I=\frac{\varepsilon}{R+r}$$

代入上式得

$$P=P(R)=\left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2R=\frac{\varepsilon^2R}{(R+r)^2},\quad R\in(0,+\infty)$$

$$P'(R)=\varepsilon^2\ \frac{r-R}{(r+R)^3}$$

令 $P'(R)=0$，在 $(0,+\infty)$ 得唯一驻点 $R=r$。

由于最大输出功率一定存在，且驻点唯一，因此当 $R=r$ 时，输出功率最大，最大输出功率为 $P=\frac{\varepsilon^2r}{(r+r)^2}=\frac{\varepsilon^2}{4r}$。

从以上可以看出，解决最大值、最小值应用问题的关键是由已知条件建立函数关系式，如何建立函数关系式要根据实际问题具体分析来决定。

应用 3　【货场设置】设铁路边上离工厂 C 最近的点 A 距工厂 20km，铁路边上 B 城距 A 点 200km，现要在铁路线 AB 上选一点 D 修筑一条公路，已知铁路与公路每吨・千米的货运费之比为 3∶5，问 D 选在何处时，才能使产品从工厂 C 运到 B 城的每吨货物的总运费最省？（见图 3-6）

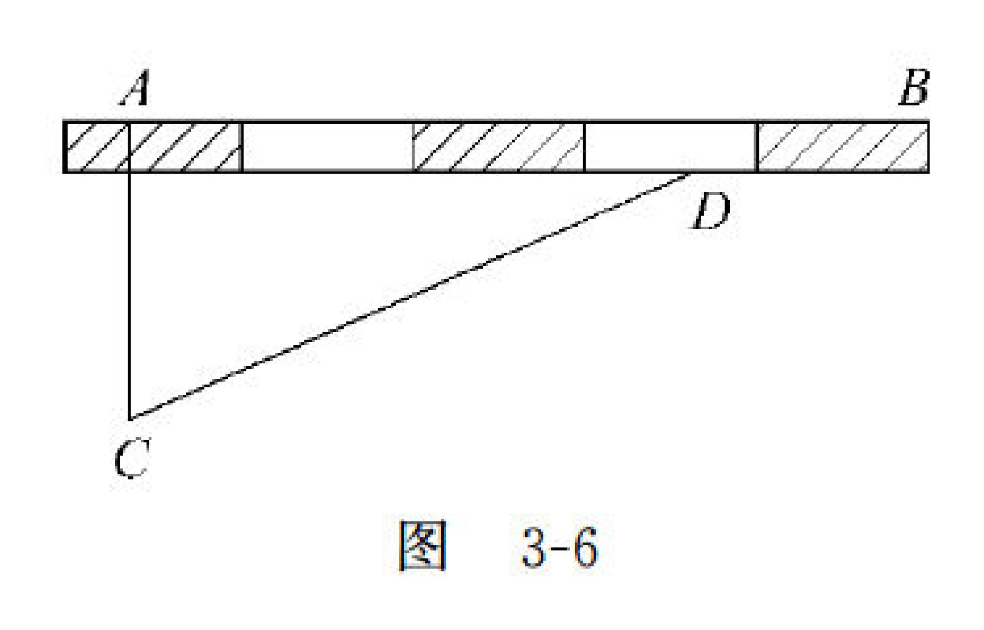


图　3-6

解：设 D 点选在距离 A 处 $x$km，又设铁路与公路的每吨·千米货运费分别为 $3k$、$5k$（k 为常数），则产品从 C 处运到 B 城的每吨总运费

$$y = 5k \cdot CD + 3k \cdot BD = 5k\sqrt{400 + x^2} + 3k(200 - x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 200$$

因为

$$y' = 5k\frac{x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3k = \frac{k(5x - 3\sqrt{400 + x^2})}{\sqrt{400 + x^2}}$$

令 $y'=0$，即 $5x=3\sqrt{400+x^2}$，得 $x=15$。

将 $y|_{x=15}=680k$ 与闭区间$[0,200]$端点的函数值比较，由于 $y|_{x=0}=700k$，$y|_{x=200}=5\sqrt{40\,400}k>1000k$，因此，当 D 点选在距离 A 点 15km 处，这时每吨货物的总运费最省。

实践模块 3.3

A 组（基础训练）

1. 求下列函数的极值和极值点。

（1）$y=3x^4-4x^3$

（2）$y=3x^4-8x^3-6x^2+24x$

（3）$y=3x^4-8x^3+6x^2$

（4）$y=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

2. 求 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x$ 在$[-1,2]$区间上的最大值和最小值。

B 组（能力提高训练）

1. 设函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x=1$，$x=2$ 时都取得极值，试求 a 与 b 的值。

2. 要造一个长方体无盖蓄水池，其容积为 500m^3，底面为正方形。设底面与四壁的单位造价相同，问底边和高各为多少时才能使所使用材料最省？

3. 某机床厂每批生产机床 x 台的费用为 $C(x)=12x+70$（万元），得到的收入为 $R(x)=40x-2x^2$（万元）。问每批应该生产多少台机床，才能使机床厂的利润最大？

4. 要铺设一石油管道，将石油从炼油厂输送到石油罐装点，如图 3-7 所示。炼油厂附近有条宽 2.5km 的河，罐装点在炼油厂的对岸沿河下游 10km 处。如果在水中铺设管道的费用为 6 万元/km，在河边铺设管道的费用为 4 万元/km。试在河边找一点 P，使管道铺设费用最低。

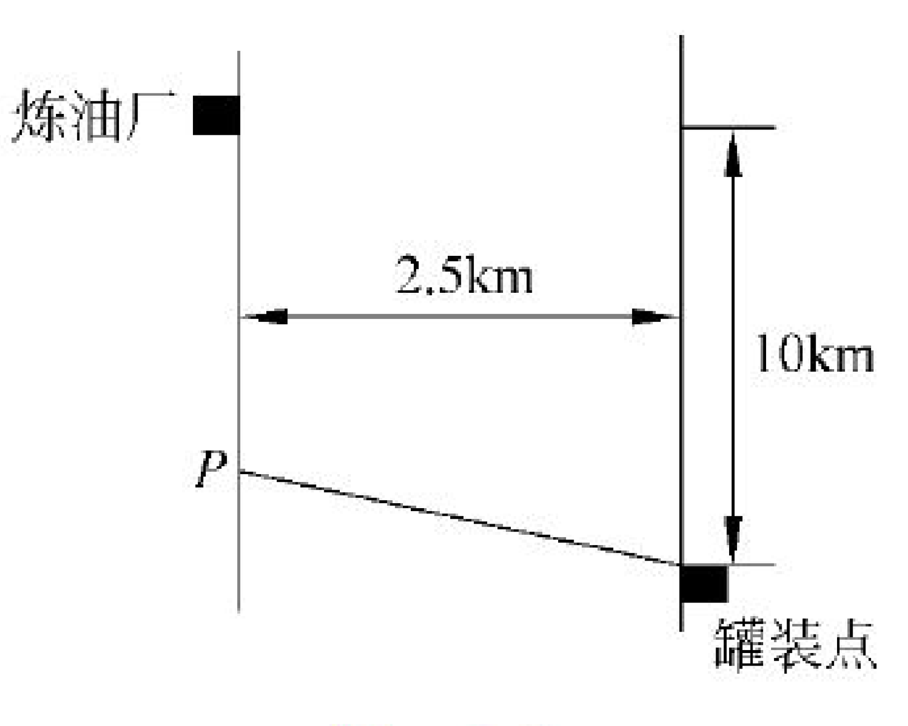


图 3-7

本 章 小 结

1. 主要内容

洛必达法则;用导数研究函数的单调性、极值、凹凸性、拐点及函数的最大值和最小值问题。

2. 方法要点

(1) 利用洛必达法则求未定式极限。

(2) 利用导数求单调区间。

(3) 利用导数求极值和最值。

(4) 函数的最值及在实际问题中的应用。

阅读材料 3　数学的应用

数学起源于计数、丈量土地等实际的生产活动,因此一开始就是应用的。在 17 世纪由牛顿根据力学上的需要发明微积分之后,很长的时间里很多数学家同时也是力学家、物理学家。对他们来说,理论和应用是密不可分的。从那时到 20 世纪初,当时数学应用的领域主要是力学、物理、天文以及传统工业。恩格斯在《自然辩证法》中说过:“数学的应用:在刚体力学中是绝对的,在气体力学中是近似的,在液体力学中就已经比较困难了;在物理学中是实验性的和相对的;在化学中是最简单的一次方程式;在生物学中等于零。”

“二战”期间,数学在高速飞行、核弹设计、火炮控制、物资调运、密码破译及军事运筹等方面发挥了重大作用,涌现了一批新的应用数学学科,使应用数学包括了很多学科及门类,形成了强大的阵容,开始树起了自己的旗帜。数学的应用已经拓展到几乎每个科学领域和应用部门,而且在其中起着关键的不可替代的重要作用。

近几十年来,随着科学技术、数学本身的飞速发展以及计算机与计算技术的兴起和发展,数学(包括其中最抽象的分支)在其他领域中空前广泛的渗透和应用已是有目共睹,可以说是数学的作用无所不在,且越来越重要。一门科学只有当它充分利用了数学之后,才能成为一门精确的科学,马克思当年的这一预言正在不断地得到证实。

数学应用的领域虽无边际,但大致也可分为三方面:经济建设(工、农、商等),科学与技术(特别是高科技),军事与国防。

经济建设方面:通过对数据的处理,人们可以探明地下几百公里处的油气储量;在制造业中,涡轮机、压缩机、内燃机、发电机、数据存储磁盘、大规模集成电路、汽车车身、船体等的设计中,也都用到了先进数学设计方法;用数学,企业家可以探求产品结构、提高产品质量,经济学可以预测价格变动趋势、指明未来经济走向。

科学与技术方面:数学作为科学的语言和工具,在科学研究与发明、工程技术上起着关键性的作用。除了在传统的力学、物理学、天文学继续扮演重要角色,数学在生物学、医学及脑科学等领域的作用也取得了突破,无论是 CT 机的问世、DNA 结构模型的描述,还是测定分子结构新方法的产生等,无不渗透着数学的思想。同时,数学在社会科学也开辟

了领域，用数学来进行作品鉴真和史学研究，也产生了诸如数理语言学之类的边缘学科。当今信息时代就是数学时代。

军事与国防方面：早在古罗马时代，阿基米德就在兵器制造中应用了数学原理。而现在，数学与国防军事更有密切的关系，数学家的研究工作可能与空气动力学、流体动力学、弹道学、雷达及声纳、原子弹、密码与情报、空照地图、气象学、计算器等有关，并且直接或间接影响到武器与战术。20 世纪 90 年代初的海湾战争从某种角度上讲就是数学战。我国成功研制出原子弹、氢弹和其他先进武器，发射火箭与卫星，其中也凝聚着数学家的劳动和智慧。在维护国家安全上，信息的加密与破密、刑事案件的侦破等也都直接与数学有关。

近数十年来，计算工具飞速进步，大规模应用软件的产生，使数学的应用领域更为宽广。我们可以期待数学为国家和人民创造越来越多的财富。

综合实训 3

1. 选择题。

(1) 若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则下列命题(　　)正确。

A. $f'(x_0)=0$　　B. $f'(x_0)\neq 0$

C. $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在　　D. $f'(x_0)$ 不存在

(2) 设 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点，则 $y=f(x)$ 在 x_0 处不一定(　　)。

A. 连续　　B. 可导　　C. 有极值　　D. 有水平切线

(3) 下列结论正确的有(　　)。

A. x_0 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f'(x_0)$ 存在，则必有 $f'(x_0)=0$

B. x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 x_0 必是 $f(x)$ 的驻点

C. 若 $f'(x_0)=0$，则 x_0 必是 $f(x)$ 的极值点

D. 使 $f'(x)$ 不存在的点 x_0，一定是 $f(x)$ 的极值点

(4) 设函数 $f(x)$ 满足以下条件：当 $x<x_0$ 时，$f'(x_0)>0$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x_0)<0$。则 x_0 必是函数 $f(x)$ 的(　　)。

A. 驻点　　B. 极大值点　　C. 极小值点　　D. 不能确定

(5) 函数 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 的单调递增区间为(　　)。

A. $(0,\mathrm{e})$　　B. $(1,\mathrm{e})$　　C. $(\mathrm{e},+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

2. 填空题。

(1) 函数 $f(x)=\ln(1+x^2)-x$ 在________区间上单调减少。

(2) 当 $x=1$ 时，若函数 $y=x^2-2px+q$ 取得极值，则 $p=$________。

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 9x}=$________，是________型未定式。

(4) 函数 $f(x)=x^2\ln x$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最大值是________，最小值是________。

3. 求极限。

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$　(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

4. 求 $y=3x^4-8x^3+6x^2$ 的单调区间与极值。

5. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值。

6. 欲围一个面积为 150m² 的矩形场地，所用材料的造价其正面是 6 元/m²，其余三面是 3 元/m²，问场地的长、宽各为多少时，才能使所用材料费最少？

7. 如图 3-8 所示，矿务局拟自地平面上一点 A 掘一管道至地平面下一点 C，设 AB 长 600m，BC 长 240m，地平面 AB 是黏土，掘进费为 5 元/m；地平面以下是岩石，掘进费为 13 元/m，怎样掘法费用最省？最省要用多少元？

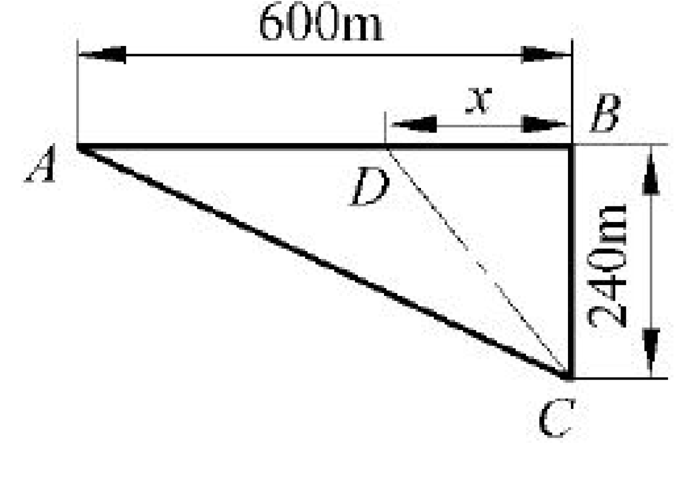


图　3-8

第 4 章

不定积分

在前面两章中我们已经讨论了一元以及多元函数的微分学，在本章及第 5 章将研究与微分学相反的问题，即积分学问题。一元函数的积分学有两个基本概念——不定积分与定积分。本章主要介绍不定积分的概念、性质和计算方法。

知识模块 4.1 不定积分的概念与性质

学习任务

【知识目标】

（1）理解原函数与不定积分的概念。

（2）掌握不定积分的基本公式和性质。

【能力目标】

能运用不定积分的基本公式和基本性质进行计算。

【学习重点】

原函数与不定积分的概念；不定积分的基本公式。

【学习难点】

原函数与不定积分的概念。

4.1.1 原函数与不定积分的概念

定义 4-1 函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，如果存在可导函数 $F(x)$，使

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x, \quad x\in I$$

称 $F(x)$是函数 $f(x)$在区间 I 上的一个**原函数**。

例如：因为$(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数；因为$(x^2+1)'=2x$，所以 x^2+1 是 $2x$ 的一个原函数。

我们知道，一个可微函数的导数只有一个，那么当一个函数具有原函数时，它的原函数是否也只有一个呢？由于$(x^2+1)'=2x$，$(x^2+2)'=2x$，$(x^2-\sqrt{3})'=2x$，…，$(x^2+C)'=2x$（C 是任意常数），所以 x^2+1，x^2+2，$x^2-\sqrt{3}$，…，x^2+C 都是 $2x$ 的原函数，可见 $2x$ 的原函数不止一个，而是有无穷多个，且其中任意两个原函数之间只相差一个常数。这样，我们得到下面的定理。

定理 4-1　若函数 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则 $F(x)+C$(C 是任意常数)是 $f(x)$的全部原函数，且其任意两个原函数之间仅相差一个常数。

在前面的讨论中，我们都假定 $f(x)$有原函数，那么函数 $f(x)$应具备什么条件，才能保证它有原函数呢？下面给出一个结论。

定理 4-2　(**原函数存在定理**)如果函数 $f(x)$在区间 I 上连续，则函数 $f(x)$在该区间上一定存在原函数。

简单地说，连续函数必有原函数，由于初等函数在其定义区间上都是连续函数，所以初等函数在其定义区间上都有原函数。

定义 4-2　如果函数 $F(x)$是 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数，则称 $f(x)$的全部原函数 $F(x)+C$(C 是任意常数)为 $f(x)$在区间 I 上的**不定积分**，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

式中，“$\int$”称为**积分号**；$f(x)$称为**被积函数**；$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**；x 称为**积分变量**；C 称为**积分常数**。

求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 就是求被积函数 $f(x)$的全部原函数。为此，只需求得 $f(x)$的一个原函数 $F(x)$，然后再加上任意常数 C 即可。

【例 4-1】　求 $\int x^2\mathrm{d}x$。

解：因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$

所以 $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3+C$

【例 4-2】　求 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

解：因为当 $x>0$ 时，由 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，有 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$。

当 $x<0$ 时，由 $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$，有 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x)+C$。

所以综上所述得 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$。

4.1.2　不定积分的几何意义

如果函数 $f(x)$在某个区间上的一个原函数为 $F(x)$，通常我们把这个原函数 $F(x)$的图像称为 $f(x)$的一条积分曲线，其方程为 $y=F(x)$。因此 $f(x)$的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 在几何上就表示全体积分曲线所组成的积分曲线簇。它们的特点是，同一条曲线在 y 轴上平移之后所形成的所有曲线，在横坐标相同的点处它们的切线平行且斜线的

斜率都等于 $f(x)$，如图 4-1 所示。

【例 4-3】 设曲线通过点(1,2)，且其上任意一点处的切线斜率等于这点的横坐标的两倍，求此曲线方程。

解：设所求曲线方程为 $y=f(x)$，由导数的几何意义，据题设曲线上任一点(x,y)处的切线斜率为

$$y' = 2x$$

所以

$$y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$$

又由于所求曲线经过点(1,2)，故有 $2=1+C$，得 $C=1$。

因此，所求曲线方程为 $y=x^2+1$。

从几何上看，$y=x^2+C$ 的图形可由曲线 $y=x^2$ 的图形沿 y 轴平移$|C|$个单位得到，所以 $y=x^2+C$ 表示一簇抛物线，而 $y=x^2+1$ 则是这簇曲线中通过点(1,2)的那一条，如图 4-2 所示。

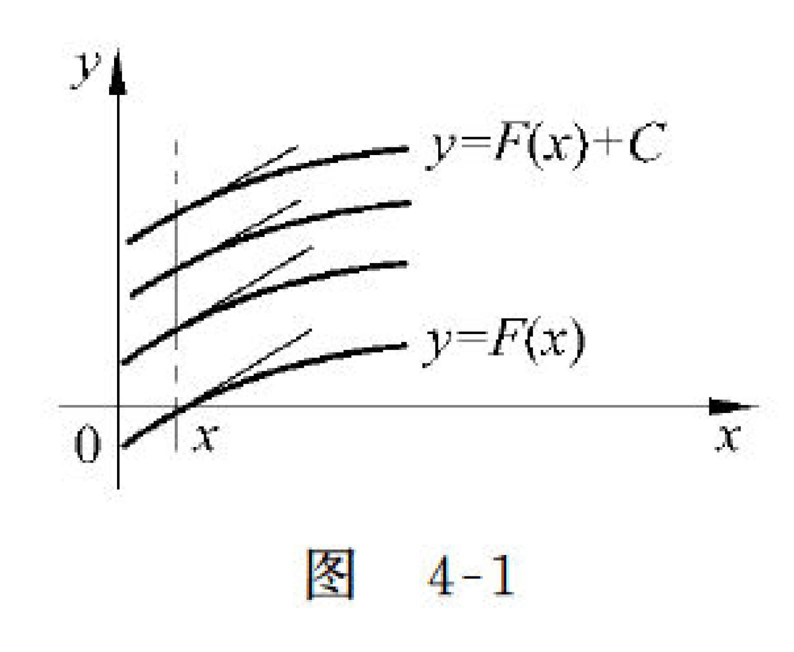


图 4-1

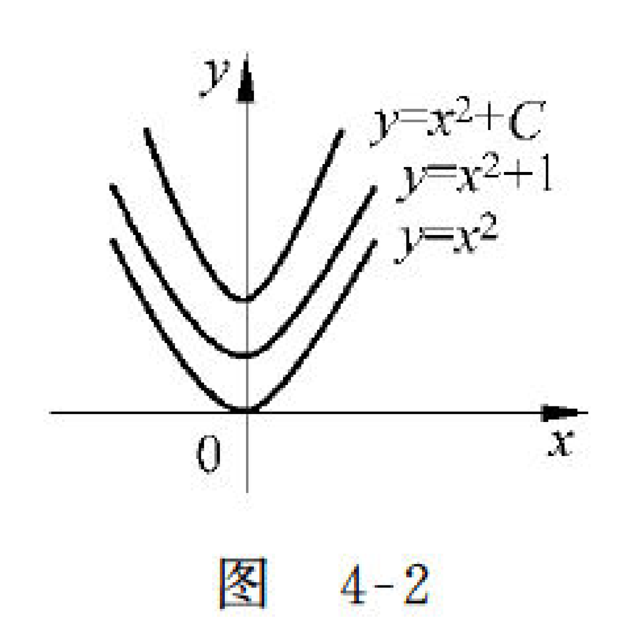


图 4-2

4.1.3 不定积分的性质

由不定积分的定义，可得到不定积分的下述性质。

性质 1 积分与微分的互逆运算性质，即

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$

此性质表明，不定积分的导数(或微分)等于被积函数(或被积表达式)，而函数的导数(或微分)的不定积分等于全部原函数。

性质 2 被积函数中不为零的常数因子可提到积分号外面，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x,\quad k \text{ 为非零常数}$$

性质 3 两个函数代数和的不定积分等于两个函数不定积分的代数和，即

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\mathrm{d}x$$

性质 2、性质 3 还可以推广到有限个函数代数和的形式，即

$$\int [k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x) \pm \cdots \pm k_n f_n(x)]\mathrm{d}x$$

$$=k_1\int f_1(x)\mathrm{d}x \pm k_2\int f_2(x)\mathrm{d}x \pm \cdots \pm k_n\int f_n(x)\mathrm{d}x$$

4.1.4　基本积分公式

由于求不定积分的运算是求导数运算的逆运算，所以由导数的基本公式相应地可以得到如下积分的基本公式。

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k 是常数)

(2) $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$，α 是常数)

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

(4) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0$，$a \neq 1$)

(5) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

(6) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

(7) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

(8) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

(10) $\int \tan x\sec x\mathrm{d}x = \sec x + C$

(11) $\int \cot x\csc x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

(13) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

以上 13 个公式称为**基本积分公式**，它们是求不定积分的基础，必须熟记。

应用模块 4.1

应用 1　【物体上抛】一个物体以初速度 v_0 做竖直上抛运动，求其运动规律。

解：将物体运动的铅直线作为 x 轴，方向向上，轴与地面的交点作为坐标原点，建立直角坐标系(略)。

设运动开始时刻为 $t=0$，当 $t=0$ 时物体所在位置的坐标为 x_0，在时刻 t 时坐标为 x，所求函数为 $x=x(t)$。

在时刻 t 时，物体向上的运动速度为$\frac{dx}{dt}=v(t)$。由于竖直上抛运动的加速度为$-g$，因此

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=-g$$

由$\frac{dv}{dt}=-g$，得

$$v(t)=\int(-g)dt=-gt+c_1$$

又 $v(0)=v_0$ 得 $c_1=v_0$，所以

$$v(t)=-gt+v_0$$

再由$\frac{dx}{dt}=v(t)$，得

$$\begin{aligned}x&=\int v(t)dt=\int(-gt+v_0)dt=-g\int t dt+v_0\int dt\\&=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+c_2\end{aligned}$$

由题设，当 $t=0$ 时，$x=x_0$ 得 $c_2=x_0$。

于是所求运动规律为 $x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0$。

应用 2 【篮球与大厦】一只篮球在地球引力的作用下从一幢大厦的屋顶掉下，5s 时落地，求此大厦的高度(空气阻力不计)。

解：由于篮球从大厦顶掉下时是在地球引力的作用下做自由落体运动，由加速度与速度的关系，有

$$a=\frac{dv}{dt},\text{且 } t=0 \text{ 时}, v=0$$

所以

$$v=\int g dt=gt+C_1$$

将 $v(0)=0$ 代入上式，得 $C_1=0$。于是，篮球做自由落体运动的速度方程为

$$v=gt$$

又 $v=\frac{ds}{dt}=gt$，所以

$$s=\int gt dt=\frac{1}{2}gt^2+C_2$$

将 $s(0)=0$ 代入上式，得 $C_2=0$，即篮球的运动方程为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

由于 $t=5$s 时篮球落地，所以大厦的高度为 $h=\frac{1}{2}g\times5^2=12.5g=122.5$(m)(其中，重力加速度 $g=9.8\text{m/s}^2$)。

应用 3　【复合的伤口】医学研究发现，刀割伤口表面修复的速度为$\frac{dA}{dt}=-5t^{-2}$(cm²/天)($1\leqslant t\leqslant 5$)，其中 A 表示伤口的面积，假设 $A(1)=5$，问受伤 5 天后该病人的伤口表面积为多少？

解：由 $\frac{dA}{dt}=-5t^{-2}$

得 $$dA=-5t^{-2}dt$$

两边求不定积分得 $$A(t)=-5\int t^{-2}dt=5t^{-1}+C$$

将 $A(1)=5$ 代入上式得 $C=0$。

所以 5 天后病人的伤口表面积 $A(5)=5\times 5^{-1}=1(\text{cm}^2)$。

应用 4　【谋杀在何时发生】发生一起谋杀案，警察下午 4:00 到达现场。法医测得尸体温度为 30℃，室温 20℃，已知尸体在最初 2 小时降低度为零，谋杀是什么时间发生的？

解：设 $T(t)$表示尸体在时刻 t 时的温度，则 $T(0)=37$(人体的初始温度)，$T(2)=35$，T_e 表示环境温度。由 Newton 传热定律得

$$-\frac{dT}{dt}=k(T-T_e)$$

即

$$\frac{d(T-20)}{T-20}=-kdt$$

两边求不定积分得

$$\ln(T-20)=-kt+c_1$$

所以 $$T-20=c_2e^{-kt},\quad T=20+c_2e^{-kt},\quad c_2=e^{c_1}$$

将 $T(0)=37$ 代入上式得 $c_2=17$。

于是 $$T=20+17e^{-kt}$$

又 $$T(2)=20+17e^{-2k}=35$$

所以 $$e^{-2k}=\frac{15}{17},\quad k=\ln\left(\frac{15}{17}\right)\Big/2\approx 0.0626$$

再由 $$T(t)=20+17e^{-kt}=30,\quad e^{-kt}=\frac{10}{17}$$

得 $$t=\ln\left(\frac{17}{10}\right)\Big/k=8.4970\approx 8.5$$

故作案时间约为上午 7:30。

实践模块 4.1

A 组(基础训练)

1. 填空题。

(1) 函数 x^2 的原函数是________。

(2) 函数 $\sin x$ 是函数________的原函数。

(3) 已知 $f'(x)=g(x)$，则 $\int g(x)dx=$ ________。

(4) $\mathrm{d}\int \arctan x\mathrm{d}x =$ ________。

(5) $\int \mathrm{d}\ln x =$ ________。

2. 求过点(1,2),且在任一点处的切线斜率为 $3x^2$ 的曲线方程。

3. 已知动点在时刻 t 时的速度为 $v=3t-2$,且 $t=0$ 时,$s=5$,求此动点的运动方程。

B 组(能力提高训练)

1. 填空题。

(1) 若 $f(x)$的一个原函数为 $4x^3$,则 $f(x)=$________。

(2) 若 $f(x)$的一个原函数为 $4x^3$,则 $\int f(x)\mathrm{d}x =$ ________。

(3) 已知$\int f(x)\mathrm{d}x = \sin^2 x + C$,则 $f(x) =$ ________。

(4) 已知$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = \ln x$,则 $f(x) =$ ________。

2. 设某函数当 $x=1$ 时有极小值,当 $x=-1$ 时有极大值为 4,又知道这个函数的导数具有形状 $y'=3x^2+bx+c$,求此函数。

知识模块 4.2 不定积分的计算

学习任务

【知识目标】

(1) 掌握不定积分的直接积分法。

(2) 掌握不定积分的换元积分法(凑微分法、第二类换元积分法)。

(3) 掌握不定积分的分部积分法。

【能力目标】

(1) 能运用不定积分的直接积分法求解不定积分。

(2) 能运用不定积分的换元积分法求解不定积分。

(3) 能运用不定积分的分部积分法求解不定积分。

【学习重点】

不定积分的直接积分法、换元积分法和分部积分法。

【学习难点】

不定积分的换元积分法。

在不定积分的定义、性质以及基本公式的基础上,我们进一步讨论不定积分的有关计算问题。不定积分的计算方法主要有三种:直接积分法、换元积分法和分部积分法。

4.2.1 直接积分法

利用不定积分的性质和基本公式,结合适当的代数或三角恒等变形,可以求一些简单

函数的不定积分，这样的积分方法叫作**直接积分法**。

【例 4-4】 求 $\int(4x^3-2x^2+5x+3)\mathrm{d}x$。

解：
$$\begin{aligned}&\int(4x^3-2x^2+5x+3)\mathrm{d}x\\&=\int 4x^3\mathrm{d}x-\int 2x^2\mathrm{d}x+\int 5x\mathrm{d}x+\int 3\mathrm{d}x\\&=4\int x^3\mathrm{d}x-2\int x^2\mathrm{d}x+5\int x\mathrm{d}x+3\int\mathrm{d}x\\&=4\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^3}{3}+5\cdot\frac{x^2}{2}+3x+C\\&=x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+3x+C\end{aligned}$$

注：

(1) 求函数的不定积分时积分常数 C 不能丢掉，否则就会出现概念性的错误。

(2) 等式右端的每个不定积分都有一个积分常数，因为有限个任意常数的代数和仍是一个常数，所以只要在结果中写一个积分常数 C 即可。

(3) 检验积分计算是否正确，只需对积分结果求导，看它是否等于被积函数。若相等，积分结果是正确的，否则就是错误的。

【例 4-5】 求下列积分。

(1) $\int\sqrt{x}(x-1)^2\mathrm{d}x$　　(2) $\int\frac{3x^2-2x+1}{x^2}\mathrm{d}x$

解：(1)
$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}(x-1)^2\mathrm{d}x&=\int\sqrt{x}(x^2-2x+1)\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x\\&=\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-2\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2-2x+1}{x^2}\mathrm{d}x&=\int\left(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=3\int\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=3x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+C\end{aligned}$$

【例 4-6】 求下列积分。

(1) $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(2) $\int\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$

解：在积分基本公式中没有这种类型的积分公式，可以先对被积函数进行恒等变形，再逐项求积分。

(1)
$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= x - \arctan x + C$$

(2) $\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{x^2+x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$= \arctan x - \frac{1}{x} + C$$

【例 4-7】 求下列积分。

(1) $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$　　　(2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

解：(1) $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx = \int \frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos x dx\right)$

$$= \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$$

(2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$$= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx$$

$$= \tan x - \cot x + C$$

求三角函数的积分，形式变化非常灵活，能够熟练运用公式非常重要。常用的三角函数公式补充如下。

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \quad \cot^2 x = \csc^2 x - 1 \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

4.2.2 换元积分法

1. 第一类换元积分法

先分析下面的例题。

【例 4-8】 求 $\int \cos 2x dx$。

分析：计算不定积分 $\int \cos 2x dx$ 时，若直接用基本积分公式 $\int \cos x dx = \sin x + C$，所求答案为 $\sin 2x + C$。显然这个结果是错误的，因为 $(\sin 2x + C)' = 2\cos 2x$，就是说 $\sin 2x$ 不是 $\cos 2x$ 的一个原函数。事实上，因为 $\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \cos 2x$，所以 $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$。出现错误结果的原因在于，被积函数 $\cos 2x$ 与公式 $\int \cos x dx$ 中的被积函数不一样，$\cos 2x$ 是复合函数。因此，计算时应将原积分作变形处理。

解：把原积分作下列变形后计算。

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x)$$

$$\xlongequal{\text{令 } 2x=u} \frac{1}{2}\int \cos u \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\sin u + C$$

$$\xlongequal{\text{回代 } u=2x} \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

例 4-8 解法中，通过引入新变量 $u=\varphi(x)=2x$，从而把原积分化为关于 u 的一个简单积分，再用基本积分公式求解。现在的问题是，在公式 $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$ 中，如果将 x 换成了 $u=\varphi(x)$，对应得到公式 $\int \cos u \mathrm{d}u = \sin u + C$ 是否还成立？回答是肯定的，请看下面的定理。

定理 4-3　如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则

$$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$$

式中，$u=\varphi(x)$ 是 x 的任意可微函数。

证明：由于 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，所以 $\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$，根据微分形式的不变性，则有

$$\mathrm{d}F(u) = f(u)\mathrm{d}u$$

式中，$u=\varphi(x)$ 是 x 的可微函数。所以有

$$\int f(u)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}F(u) = F(u) + C$$

该定理告诉我们：

(1) 求不定积分时，如果被积函数可以整理成 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 形式，并且 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{凑微分}} \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$

$$\xlongequal{\text{换元 } \varphi(x)=u} \int f(u)\mathrm{d}u$$

$$= F(u) + C$$

$$\xlongequal{\text{回代 } u=\varphi(x)} F[\varphi(x)] + C \tag{4-1}$$

这种先"凑"微分式，再作变量置换的方法，称为**第一类换元积分法**，也称**凑微分法**。式(4-1)称为**第一类换元积分公式**。

(2) 定理 4-3 表明了将基本积分公式中的积分变量换成任一可微函数，公式仍成立，这就大大扩充了基本积分公式的使用范围。

【例 4-9】　求 $\int (5x+8)^3 \mathrm{d}x$。

解：基本积分公式中有 $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$

$$\int (5x+8)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int (5x+8)^3 \mathrm{d}(5x+8)$$

$$\xlongequal{令\ 5x+8=u}\frac{1}{5}\int u^3\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{20}u^4+C$$

$$\xlongequal{回代\ u=5x+8}\frac{1}{20}(5x+8)^4+C$$

【例 4-10】 求 $\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$。

解：因为 $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x^2)$

所以

$$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2$$

$$\xlongequal{令\ x^2=u}\int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\mathrm{e}^u+C$$

$$\xlongequal{回代\ u=x^2}\mathrm{e}^{x^2}+C$$

【例 4-11】 求 $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$。

解：因为 $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$

所以

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}\ln x$$

$$\xlongequal{令\ \ln x=u}\int u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}u^2+C$$

$$\xlongequal{回代\ u=\ln x}\frac{1}{2}\ln^2 x+C$$

由上面例题可以看出，用第一类换元积分法计算积分时，关键是把被积表达式凑成两部分，其中一部分为 $\varphi(x)$ 的函数 $F[\varphi(x)]$，而另一部分凑成 $\mathrm{d}\varphi(x)$ 的形式。在凑微分时，常用到下列的微分公式，熟记它们有助于求不定积分。

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)\ (a\neq 0,a,b\ 为常数)$$

$$x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln|x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(2\sqrt{x})$$

$$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\arcsin x$$
$$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(-\cos x)$$
$$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x$$
$$\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan x$$
$$\csc^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(-\cot x)$$
$$\sec x\tan x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sec x$$
$$\csc x\cot x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(-\csc x)$$

凑微分的式子绝非只有这些，要根据具体问题具体分析，读者应在熟记基本积分公式和一些常用微分公式的基础上，通过大量的练习才能逐步较好地掌握这一重要积分方法。

【例 4-12】 求 $\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解： $\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\arctan x\mathrm{d}\arctan x$

$$\xlongequal{\text{令 } \arctan x = u} \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C$$
$$\xlongequal{\text{回代 } u = \arctan x} \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

当运算比较熟练后，设变量代换及回代这两个过程可以省略不写。

【例 4-13】 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$。

解： $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

【例 4-14】 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$。

解： $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \int\frac{\mathrm{d}x}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int\frac{1}{a+x}\mathrm{d}(a+x) - \int\frac{1}{a-x}\mathrm{d}(a-x)\right]$$
$$= \frac{1}{2a}(\ln|a+x| - \ln|a-x|) + C$$
$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

【例 4-15】 求 $\int\tan x\mathrm{d}x$。

解： $\int\tan x\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

同理可得

$$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

【例 4-16】 求 $\int \csc x\mathrm{d}x$。

解：$\int \csc x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

因为

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$$

所以

$$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

由三角函数的诱导公式 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$，不难得到

$$\int \sec x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}\mathrm{d}x$$

$$= \int \csc\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

第一类换元积分法还适合求一些简单三角函数有理式的积分。

【例 4-17】 求 $\int \cos^2 x\mathrm{d}x$。

解：$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}2x$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

【例 4-18】 求 $\int \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x$。

解：$\int \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}\sin x$

$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x$$

$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x)\mathrm{d}\sin x$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

从以上例子可以看出，同名三角函数化和降幂法是计算形如 $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$ (m, n 为非负整数)不定积分的基本方法，具体可分两种情况。

(1) 若 m, n 中至少有一个奇数，如 n 为奇数，则将奇次幂分出一次幂与偶次幂乘积，并将 $\sin x dx$ 凑成微分 $d(-\cos x)$；而当 m 为奇数时，可将 $\cos x dx$ 凑成 $d\sin x$，从而转化为同名三角函数的积分。

(2) 若 m, n 均为偶数，一般采用倍角公式降低被积函数的幂指数，然后再进行积分。

另外，还需要指出的是，同一个不定积分由于采用积分方法的不同，有时积分结果的表达形式可能不一样，但这些结果除了相差一个常数外，实质上并无差别，属同一个原函数簇。

【例 4-19】 求 $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$。

解法 1：
$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{1}{\cos x + \sin x} d(\sin x + \cos x)$$
$$= \ln|\sin x + \cos x| + C$$

解法 2：
$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x} dx$$
$$= \int \sec 2x dx - \int \tan 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$$

解法 3：
$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} dx = \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 + \sin 2x} d(1 + \sin 2x)$$
$$= \frac{1}{2}\ln|1 + \sin 2x| + C$$

2. 第二类换元积分法

第一类换元积分法的使用范围极为广泛，但对于某些无理函数的积分，则需应用第二类换元积分法。

第一类换元积分法是通过选择新的积分变量 $u = \varphi(x)$，将积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 化为 $\int f(u)du$ 形式。有时也会遇到与第一类换元法相反的情形，即 $\int f(x)dx$ 不易直接求出，需要适当地选择 $x = \psi(t)$ 进行换元，将积分 $\int f(x)dx$ 化为 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$ 形式，而 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$ 很容易求出结果。这就是第二类换元积分法。

定理 4-4 **(第二类换元积分法)** 设 $x = \psi(t)$ 具有连续导数 $\psi'(t)$，且 $\psi'(t) \neq 0$，又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$，$t = \psi^{-1}(x)$ 是 $x = \psi(t)$ 的反函数，则 $F[\psi^{-1}(x)]$ 是 $f(x)$ 的

原函数，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{令 x=\psi(t)} \int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C$$

$$\xlongequal{回代 t=\psi^{-1}(x)} F[\psi^{-1}(x)]+C \qquad (4\text{-}2)$$

通常称式(4-2)为**第二类换元积分公式**。

【例 4-20】 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$。

解：令 $\sqrt{x}=t$，则

$$x=t^2,\quad \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$$

所以
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t = 2\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t\right)$$
$$=2[t-\ln(1+t)]+C$$
$$=2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$$

【例 4-21】 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$。

解：由于被积函数中含有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$，所以为消去根式，可采用三角公式消去根式。令 $x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$$

所以
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\, a\cos t\mathrm{d}t$$
$$=a^2\int \cos^2 t\mathrm{d}t = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

由 $x=a\sin t$，得

$$t=\arcsin\frac{x}{a}$$

又因为

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

所以

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

【例 4-22】 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\ (a>0)$。

解：令 $x=a\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$$

所以
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{\sqrt{a^2\tan^2 t + a^2}}\mathrm{d}t = \int \frac{\sec^2 t}{\sec t}\mathrm{d}t$$
$$= \int \sec t\mathrm{d}t = \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

为了要把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数，还可以根据 $\tan t = \frac{x}{a}$ 做辅助直角三角形，如图 4-3 所示，便有

$$\sec t = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$$

因此，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$
$$= \ln|\sqrt{x^2+a^2} + x| + C, \quad C = C_1 - \ln a$$

【例 4-23】 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\ (a > 0)$。

解：和上两例类似，可以利用三角公式消去根式。

令 $x=a\sec t$，则

$$\mathrm{d}x = a\sec t\tan t\mathrm{d}t$$

所以
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t = \int \sec t\mathrm{d}t$$
$$= \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

根据 $\sec t = \frac{x}{a}$ 做辅助直角三角形，如图 4-4 所示，于是得

$$\tan t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

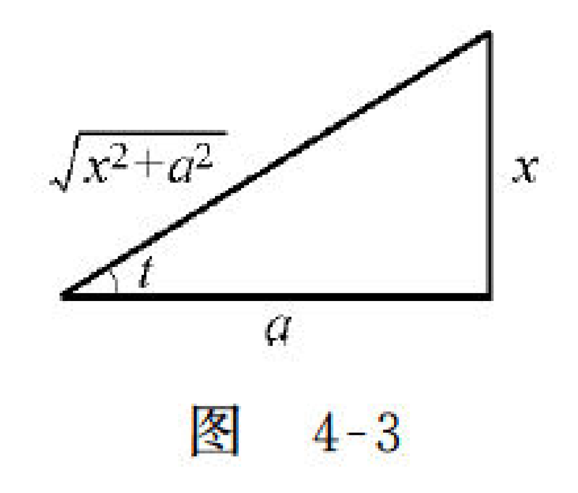


图　4-3

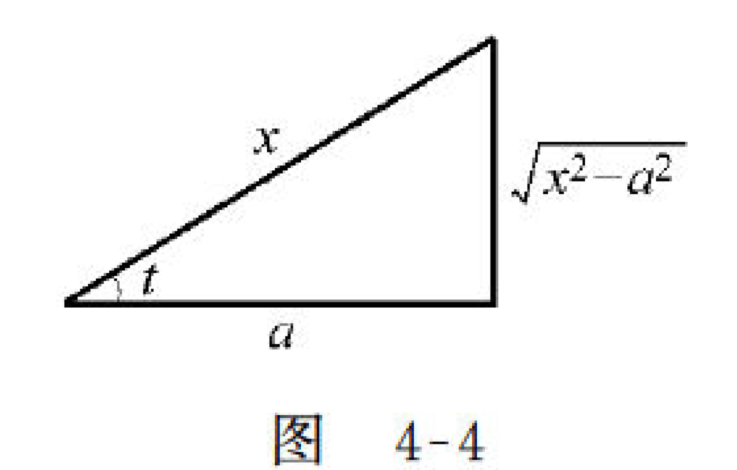


图　4-4

因此

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1$$
$$= \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad C = C_1 - \ln a$$

从上面例子可以看出，当被积函数含有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$ 或 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 时，可将被积表达式作如下变换。

(1) 含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，令 $x=a\sin t$。

(2) 含有 $\sqrt{x^2+a^2}$ 时，令 $x=a\tan t$。

(3) 含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，令 $x=a\sec t$。

这种变量代换称为**三角代换**。

在本节例题中，有一些积分是经常遇到的，所以也作为基本积分公式列示如下。

(1) $\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$

(2) $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

(3) $\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$

(4) $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$

4.2.3 分部积分法

前面分别介绍了直接积分法和换元积分法，它们是计算不定积分的两种比较重要的方法，应用范围十分广泛。但当被积函数是两种不同类型函数的乘积时，使用这两种方法往往不能奏效。例如，像 $\int x\cos x\mathrm{d}x$、$\int x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 等，这就需要用到积分法中另一种比较重要的积分方法——分部积分法。

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续的导数，由函数乘积的微分法则有

$$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$$

移项得

$$u\mathrm{d}v=\mathrm{d}(uv)-v\mathrm{d}u$$

两边积分得

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u \tag{4-3}$$

式(4-3)称为**分部积分公式**。这个公式的作用在于把求左边的不定积分 $\int u\mathrm{d}v$ 转化为求右边的不定积分 $\int v\mathrm{d}u$，而且得到的 $\int v\mathrm{d}u$ 比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易求得，这个公式起到了化难为易的作用。

【例 4-24】 求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$。

解：应用分部积分法解题时，首先将被积表达式 $x\cos x\mathrm{d}x$ 分成 u 和 $\mathrm{d}v$ 两部分，具体 u 和 $\mathrm{d}v$ 如何来选择，这是解决分部积分法的关键。

如果设 $u=x$，$\mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$，则

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x,\quad v=\sin x$$

于是

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$$

反过来，如果设 $u=\cos x$，$\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$，则

$$du = -\sin x dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

于是

$$\int x\cos x dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x dx$$

这时右端积分比左端的积分更加复杂，可见这种取法不合适。因此，在使用分部积分法时，正确选择 u 和 dv 是十分重要的，一般要考虑下面两点。

（1）v 要容易求出。

（2）$\int v du$ 要比 $\int u dv$ 容易求出。

【例 4-25】 求 $\int xe^x dx$。

解：设 $u=x, dv=e^x dx=de^x$，则

$$du=dx, \quad v=e^x$$

于是

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1)+C$$

【例 4-26】 求 $\int x\ln x dx$。

解：设 $u=\ln x, dv=xdx=d\left(\frac{x^2}{2}\right)$，则

$$du = \frac{1}{x}dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

于是

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

【例 4-27】 求 $\int x\arctan x dx$。

解：设 $u=\arctan x, dv=xdx=d\left(\frac{x^2}{2}\right)$，则

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}\int x\arctan x dx &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C \\ &= \frac{1}{2}(x^2\arctan x - x + \arctan x) + C\end{aligned}$$

对分部积分法熟练以后，可以省略“设”的步骤。

【例 4-28】 求$\int e^x \sin x\mathrm{d}x$。

解：$\int e^x \sin x\mathrm{d}x = \int e^x \mathrm{d}(-\cos x) = -e^x\cos x + \int \cos x e^x\mathrm{d}x$

等式右端的积分与左端的积分是同一类型的，因此对右端的积分再使用一次分部积分公式，但须引起注意的是，两次选择 u 和 $\mathrm{d}v$ 要保持一致。于是有

$$\int e^x \sin x\mathrm{d}x = -e^x\cos x + \int e^x \mathrm{d}\sin x$$
$$= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int \sin x e^x \mathrm{d}x$$

由于右端第三项就是所求积分，于是把它移到等式左端，再两端同时除以 2，便得

$$\int e^x \cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

总结前面所讲例子可以知道，分部积分法在选择 u 和 $\mathrm{d}v$ 时有下述规律。

(1) 当被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数与指数函数的乘积时，可考虑幂函数作为 u。

(2) 当被积函数是幂函数和对数函数或幂函数与反三角函数的乘积时，可考虑对数函数或反三角函数作为 u。

(3) 当被积函数是指数函数和正(余)弦函数的乘积时，那么两者均可作为 u。

在计算不定积分时，往往有些积分不只局限于一种积分方法，这就需要我们在这些方法的基础上会灵活运用。

【例 4-29】 求$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解：设$\sqrt{x}=t$，则

$$x=t^2,\quad \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$$

于是

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int te^t\mathrm{d}t = 2\int t\mathrm{d}e^t = 2\left(te^t - \int e^t\mathrm{d}t\right)$$
$$= 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$$

应用模块 4.2

应用 【能源消耗】电力消耗随经济增长而增长。新州市每年的电力消耗率呈指数增长，且增长指数大约为 0.07。1980 年年初，消耗量大约为每年 161 亿度。设 $R(t)$表示从 1980 年起第 t 年的电力消耗率，则 $R(t)=161e^{0.07t}$(亿度)。试用此公式估算从 1980 年到 2000 年间电力消耗的总量。

解：设 $T(t)$表示从 1980 年起到第 t 年($t=0$)电力消耗的总量。我们要求从 1980 年到 2000 年间电力消耗的总量，即求 $T(20)$。由于 $T(t)$是电力消耗的总量，所以 $T'(t)$就是电力消耗率 $R(t)$，即 $T'(t)=R(t)$，那么 $T(t)$是 $R(t)$的一个原函数。

$$T(t)=\int R(t)\mathrm{d}t=\int 161\mathrm{e}^{0.07t}\mathrm{d}t=\frac{161}{0.07}\mathrm{e}^{0.07t}+C$$
$$=2300\mathrm{e}^{0.07t}+C$$

因为 $T(0)=0$，所以 $C=-2300$，所以 $T(t)=2300(\mathrm{e}^{0.07t}-1)$。

从 1980 年到 2000 年间电力消耗的总量为 $T(20)=2300(\mathrm{e}^{0.07\times 20}-1)\approx 7027$(亿度)。

实践模块 4.2

A 组(基础训练)

1. 在下列横线上添上适当的系数，使等式成立。

(1) $\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(3x-2)$　　(2) $x\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(x^2+1)$

(3) $\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x}\right)$　　(4) $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{3x})$

2. 用直接积分法解下列不定积分。

(1) $\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int (x^2-3x+2)\mathrm{d}x$

(3) $\int \left(2\mathrm{e}^x+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$　　(4) $\int \left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$

3. 用换元积分法解下列不定积分。

(1) $\int \mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x$　　(2) $\int (3-2x)^3\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(4) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$

B 组(能力提高训练)

1. 在下列横线上填上适当的系数，使等式成立。

(1) $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(\sqrt{x}-1)$　　(2) $x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x^2})$

(3) $\sin 2x\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\cos 2x$　　(4) $\sec^2 3x\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\tan 3x$

(5) $\frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}=$ ________ $\mathrm{d}\arctan 3x$　　(6) $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}=$ ________ $\mathrm{d}\arcsin 2x$

2. 用直接积分法解下列不定积分。

(1) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int \sec x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x$

(5) $\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$　　(6) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$

3. 用换元积分法解下列不定积分。

(1) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$　　(2) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

(3) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$　　(4) $\int x\sin x^2 dx$

(5) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx$　　(6) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(7) $\int \sin^2 x dx$　　(8) $\int \sin^4 x\cos^3 x dx$

(9) $\int x\sqrt{1+x}dx$　　(10) $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$　　(12) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx$

(13) $\int \sqrt{1-x^2}dx$　　(14) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(15) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$　　(16) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

4. 用分部积分法解下列不定积分。

(1) $\int x\sin x dx$　　(2) $\int \ln^2 x dx$

(3) $\int \arcsin x dx$　　(4) $\int xe^{-x} dx$

(5) $\int x\sin x\cos x dx$　　(6) $\int e^{-x}\cos x dx$

本 章 小 结

1. 主要内容

原函数的概念;不定积分的概念和性质;基本积分公式;直接积分法;换元积分法;分部积分法。

2. 方法要点

积分运算和求导数(微分)运算是互逆的两种运算。本章中,我们介绍了积分计算的常用方法,并通过一系列例题说明了这些方法和必须注意的问题。通常地,求积分比求导数(微分)要难一些。通过第三章的学习我们知道,初等函数在其可导区间内的导数仍为初等函数;而反过来,当初等函数有原函数时,其原函数却未必能用初等函数表示,如 $\int e^{-x^2}dx$、$\int \frac{\sin x}{x}dx$、$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$ 等就不能用初等函数表示,这些积分也就不能用本章的方法求解。在学习中,我们可以看到,积分和求导数(微分)相比,积分比较灵活,有时还需要一些技巧。因此要熟练掌握不定积分的计算,就必须通过一定数量的练习,从中总结并掌握其规律。

(1) 直接积分法

利用不定积分的运算性质和基本积分公式,结合恒等变形等方法,可求出函数的原函数。

(2) 第一类换元积分法(凑微分法)

如果被积函数是复合函数的乘积,在将复合次数最多的函数用中间变量代换成简单函数时,其余部分是此中间变量的导数(或相差一个常数,或相差正负号),此时通常用凑微分法。

(3) 第二类换元积分法

一般情况下,被积函数中含有根式时,可用第二类换元积分法。如果被积函数中含有$\sqrt{a^2-x^2}$、$\sqrt{a^2+x^2}$或$\sqrt{x^2-a^2}$,通常用三角代换$x=a\sin t$、$x=a\tan t$、$x=a\sec t$去根号。

(4) 分部积分法

若被积函数是多项式与指数函数、对数函数、三角函数或反三角函数的乘积,则可以用分部积分法求解。

阅读材料 4　让我们为之欢呼吧——牛顿

牛顿是英国数学家、物理学家、天文学家,1643 年 1 月 4 日生于英格兰林肯郡的伍尔索普,1727 年 3 月 31 日卒于伦敦。牛顿出身于农民家庭,幼年颇为不幸。他是一个遗腹子,又是早产儿,3 岁时母亲改嫁,把他留给了外祖父母,从小过着贫困孤苦的生活。他在条件较差的学校接受了初等教育,中学时也没有显示出特殊的才华。1661 年考入剑桥大学三一学院,由于家庭经济困难,学习期间还要从事一些勤杂劳动以减免学费。但是他学习勤奋,并有幸得到著名数学家巴罗教授的指导,认真钻研了伽利略、开普勒、笛卡儿、巴罗等人的著作,还做了不少实验,打下了坚实的基础,1665 年获学士学位。同年,伦敦地区流行鼠疫,剑桥大学暂时关闭。牛顿回到伍尔索普,在乡村幽居的两年中,终日思考各种问题、探索大自然的奥秘。他平生三大发明(微积分、万有引力定律、光谱分析)都萌发于此,这时他年仅 23 岁。后来牛顿在追忆这段峥嵘的青春岁月时,深有感触地说:“当年我正值发明创造能力最强的年华,比以后任何时期更专心致志于数学和科学。”并说:“我的成功当归功于精力的思索。”“没有大胆的猜想就做不出伟大的发现。”1667 年,他回到剑桥攻读硕士学位,在获得学位后,成为三一学院的教师,并协助巴罗编写讲义,撰写微积分和光学论文。他的学术成就得到了巴罗的高度评价。例如,巴罗在 1669 年 7 月向皇家学会数学顾问柯林斯(Collins)推荐牛顿的《运用无穷多项方程的分析学》时,称牛顿为“卓越的天才”。巴罗还坦然宣称牛顿的学识已超过自己,并在 1669 年 10 月把“卢卡斯教授”的职位让给了牛顿,牛顿当时年仅 26 岁。

牛顿发现微积分,首先得助于他的老师巴罗,巴罗关于“微分三角形”的深刻思想,给他极大影响;另外费马作切线的方法和沃利斯的《无穷算术》也给了他很大启发。牛顿的微积分思想(流数术)最早出现在他于 1665 年 5 月 21 日写的一页文件中。他的微积分理论主要体现在下述三部论著中。

(1)《运用无穷多项方程的分析学》。在这一著作中他给出了求瞬时变化率的普遍方

法，阐明了求变化率和求面积是两个互逆问题，从而揭示了微分与积分的联系，即沿用至今的微积分的基本定理。当然，牛顿的论证在逻辑上是不够严密的。正如他所说："与其说是精确的证明，不如说是简短的说明。"他还应用这一方法得到许多曲面下的面积，并解决了一些能够表示成积分和式的其他问题。在1669年牛顿将这本专论印成小册子给朋友，直到1711年才正式出版。

(2)《流数术和无穷级数》。在这一论著中，牛顿对他的微积分理论作了更加广泛而深入地说明，并在概念、计算技巧和应用各方面作了很大改进。例如，他改变了过去静止的观点，认为变量是由点、线、面连续运动而产生的。他把变量叫作"流"，把变量的变化率叫作"流数"，并引进了高阶流数的概念。他用更清晰准确的语言阐明了微积分的基本问题：一是已知两个流 x 与 y 之间的关系，求它们的流数之间的关系；二是已知流数 X' 与 Y' 之间的关系，求它们的流之间的关系，并指出这是两个互逆的问题。该书中，牛顿还把流数法用于隐函数的微分，求函数的极值，求曲线的切线、长度、曲率和拐点，并给出了直角坐标和极坐标下的曲率半径公式，附了一张积分简表。这部著作完成于1671年，但却经历了半个多世纪直到1736年才正式出版。

(3)《求曲边形的面积》。这是一篇可积分曲线的经典文献。这篇论文的一个主要目的是澄清一些遭到非议的基本概念。牛顿试图排除由"无穷小"而造成的混乱局面。为此他把流数定义为"增量消逝"时获得的最终比和"初生增量"的最初比，尽管这种说法仍然是含糊其辞而有失严格，但把求极限的思想方法作为微积分的基础在这里已初露端倪。这篇论文写成于1676年，发表于1704年。

牛顿上述三个论著是微积分发展史上的重要里程碑，也为近代数学甚至近代科学的产生与发展开辟了新纪元。

牛顿的名著《自然哲学的数学原理》不仅首次以几何形式发表了流数术及其应用，更重要的是它完成了对日心地动说的力学解释，把开普勒的行星运动规律、伽利略的运动论和惠更斯的振动论等统一成为力学的三大定律。这部巨著1687年一问世，立刻被公认为人类智慧的最高结晶，哈雷赞誉它是"无与伦比的论著"。出版后不胫而走，很快被抢购一空，有人买不到，就用手抄写。这本书在社会上引起了强烈的反响。

由于牛顿对科学做出了巨大的贡献，因而受到了人们的崇敬。1688年他当选为国会议员，1689年被选为法国科学院院士，1703年当选为英国皇家学会会长，1705年被英国女王封为爵士。牛顿的研究工作为近代自然科学奠定四个重要基础：他创建的微积分，为近代数学奠定了基础；他的光谱分析，为近代光学奠定了基础；他发现的力学三大定律，为经典力学奠定了基础；他发现的万有引力定律，为近代天文学奠定了基础。1701年莱布尼茨说："纵观有史以来的全部数学，牛顿做了一半多的工作。"汤姆生(Thomson)说："牛顿的发现对英国及人类的贡献超过所有英国国王。"然而，即使像牛顿这样的伟大人物，也并非完美无缺。例如，由于他的一些学术成就或论著常常受到同时代一些科学家的争论或抨击，使他对争论简直厌恶到病态的程度，德摩根(De Morgan)说："一种病态的害怕别人反对的心理统治了他一生。"他的大部分著作都是在朋友们的劝告和坚决请求下才勉强整理出来的。晚年他在神学势力的影响下几乎完全放弃了科学而潜心于神学的研究，撰写了150万字的有关宗教、神学方面的文稿，其文字之晦涩、见解之荒谬、推理之混

乱简直令人不敢相信是出自一位大科学家之手。

牛顿临终时说："我不知道世人怎样看我，但是在我看来，我只不过像一个在海滨玩耍的孩子，偶尔很高兴地拾到几颗光滑美丽的石子或贝壳，但那浩瀚无涯的真理的大海，却还在我的前面未曾被我发现。"他还说："如果我之所见比笛卡儿等人要远一点，那只是因为我是站在巨人肩上的缘故。"

牛顿终生未娶。他死后安葬在威斯敏斯特大教堂之内，与英国的英雄们安葬在一起。当时的法国大文豪伏尔泰正在英国访问，他看到英国的大人物们都争抬牛顿的灵柩时感叹地评论说："英国有人悼念牛顿就像悼念一位造福于民的国王。"牛顿墓碑上的拉丁语墓志铭的最后一句是："他是人类的真正骄傲，让我们为之欢呼吧！"

综合实训 4

1. 填空题。

(1) 过点(2,4)，且其切线斜率为 $3x^2$ 的曲线方程为________。

(2) 设 $f(x)$是函数 $\cos x$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$ ________。

(3) $\int$ ________ $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{3x}+C$。

(4) 设 $f'(x)=1$ 且 $f(0)=0$，则$\int f(x)\mathrm{d}x=$ ________。

(5) 设 $f'(\cos x)=\sin^2 x$，则 $f(x)=$ ________。

(6) $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\mathrm{d}x=$ ________。

2. 选择题。

(1) 若 $F(x)$，$G(x)$都是函数 $f(x)$的原函数，则必有(　　)。

A. $F(x)=G(x)$　　B. $F(x)=CG(x)$

C. $F(x)=G(x)+C$　　D. $F(x)=\frac{1}{C}G(x)$(C 为不为零的常数)

(2) $\int \mathrm{d}\arctan\sqrt{x}=$ (　　)。

A. $\arctan\sqrt{x}$　　B. $\mathrm{arccot}\sqrt{x}$

C. $\arctan\sqrt{x}+C$　　D. $\mathrm{arccot}\sqrt{x}+C$

(3) 设 $f(x)=k\tan 2x$ 的一个原函数为$\frac{2}{3}\ln\cos 2x$，则 k 等于(　　)。

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

(4) 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x+C$，则 $f(x)=$(　　)。

A. $(x+2)\mathrm{e}^x$　　B. $(x-1)\mathrm{e}^x$　　C. $x\mathrm{e}^x$　　D. $(x+1)\mathrm{e}^x$

(5) 如果 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$ (　　)。

A. $-\frac{1}{x}+C$　　B. $\frac{1}{x}+C$　　C. $-\ln x+C$　　D. $\ln x+C$

3. 计算下列不定积分。

(1) $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$　　(2) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(3) $\int\frac{\cos x}{3+4\sin x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

(5) $\int\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$　　(6) $\int\frac{1}{x^2-x-6}\mathrm{d}x$

(7) $\int\cos^2x\sin x\mathrm{d}x$　　(8) $\int\frac{1+x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(9) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}}$　　(10) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

(11) $\int x\cos^2x\mathrm{d}x$　　(12) $\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$

(13) $\int\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$　　(14) $\int\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$

4. 不定积分应用问题。

(1) 设物体运动的速度与时间的平方成正比，当 $t=0$ 时，$s=0$；当 $t=3$ 时，$s=18$，求物体所经过的距离 s 和时间 t 的关系。

(2) 一电路中的电流关于时间的变化率为 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=4t-0.6t^2$，如果 $t=0$ 时，$i=2\mathrm{A}$，求电流 i 关于时间 t 的函数。

(3) 一电场中质子运动的加速度为 $a=-20(1+2t)^{-2}$（单位：$\mathrm{m/s^2}$），假设 $t=0$ 时，$v=0.3\mathrm{m/s}$，求质子的运动速度。

第 5 章

定积分及其应用

在第 4 章中我们已经讨论了积分学的第一个基本概念——不定积分，本章将在第 4 章的基础上，进一步讨论积分学的另一个基本概念——定积分。我们将从实际问题出发，引出定积分的概念，然后介绍定积分的性质与计算方法，最后讨论定积分在几何方面的一些简单应用。

知识模块 5.1　定积分的概念和性质

学习任务

【知识目标】

(1) 理解定积分的概念和定积分的几何意义。

(2) 掌握定积分的性质。

【能力目标】

(1) 能运用定积分的概念和几何意义求解一些问题。

(2) 能运用定积分的性质解决一些问题。

【学习重点】

定积分的概念；定积分的几何意义；定积分的性质。

【学习难点】

定积分的概念。

5.1.1　两个实例

1. 曲边梯形的面积

所谓**曲边梯形**是指由曲线 $y=f(x)$ 和三条直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的图形，如图 5-1 所示，在 x 轴上的线段 $[a,b]$ 叫作曲边梯形的**底**，曲线 $y=f(x)$ 叫作曲边梯形的**曲边**。

我们知道，矩形的面积公式是

$$\text{矩形面积}=\text{底}\times\text{高}$$

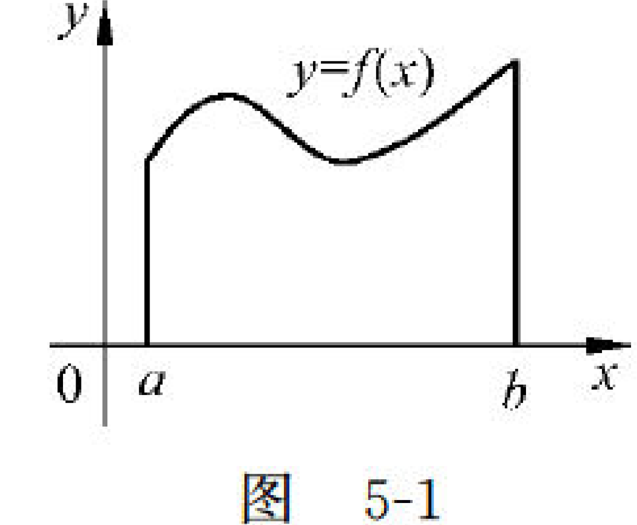


图　5-1

而曲边梯形的顶部是一条曲线，其高是变动的，故不能直接用矩形的面积公式来计算。但是如果我们用一组垂直于 x 轴的直线

把整个曲边梯形分成许多小曲边梯形后，那么对于每个小曲边梯形来说，由于底边很窄，$f(x)$又是连续的，故高度变化必很小，从而可用相应的小矩形的面积来近似地代替小曲边梯形的面积。显然分割得越细，所有小矩形面积之和就越接近于曲边梯形的面积，当分割无限细密时，所有小矩形面积之和的极限值就是曲边梯形面积的精确值。

根据上面的分析，曲边梯形的面积可按下述步骤计算。

(1) 分割　在区间(a,b)内插入 $n-1$ 个分点。

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间$[a,b]$分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

每个小区间$[x_{i-1},x_i]$的区间长度记为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\quad i=1,2,3,\cdots,n$$

过每个分点作 x 轴的垂线，将曲边梯形分割成 n 个小曲边梯形（见图 5-2），每个小曲边梯形的面积记作 $\Delta A_i(i=1,2,3,\cdots,n)$。

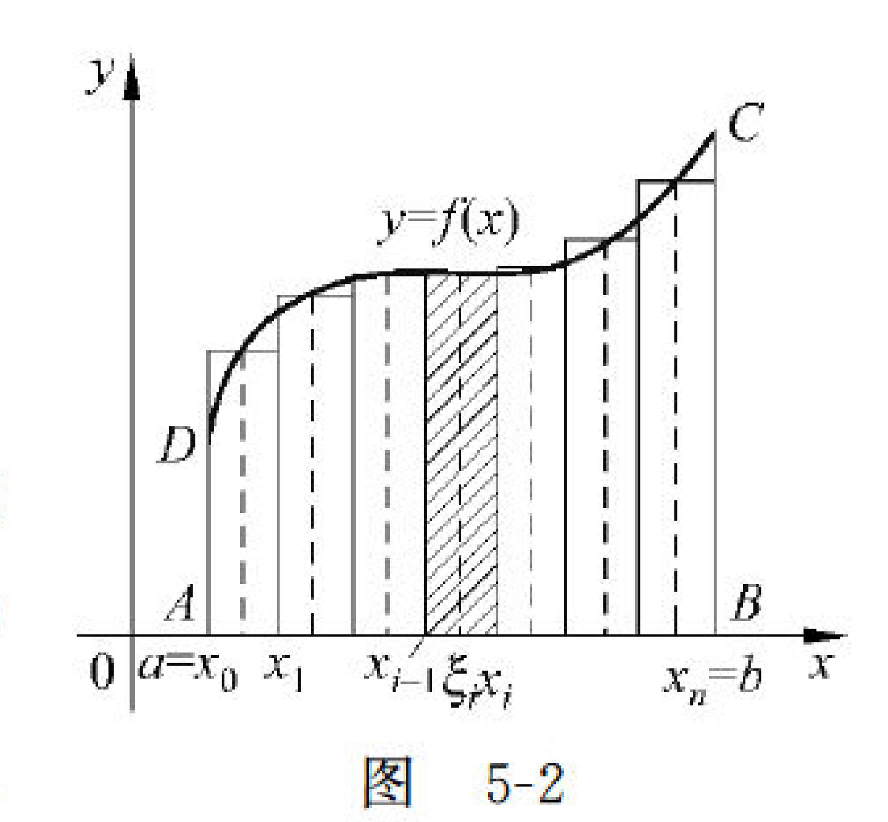


图　5-2

(2) 求和　在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i，以 Δx_i 为底边，以 $f(\xi_i)$为高作小矩形，其面积为 $f(\xi_i)\Delta x_i$，以此作为相应小曲边梯形面积的近似值，即

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

把 n 个小矩形的面积相加便得到曲边梯形面积的近似值

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

(3) 取极限　记所有小区间长度的最大值为 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，当 $\lambda\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限存在，则定义此极限值为曲边梯形的面积，即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

2. 变速直线运动的路程

设一物体作变速直线运动，已知速度 $v=v(t)$是时间$[a,b]$上的连续函数，求在这段时间内物体所走过的路程 s。

我们知道，对于物体做匀速运动有

路程＝速度×时间

现在物体做的是变速运动，因此不能直接用上面的公式计算，但是如果把时间$[a,b]$分成若干个小时间间隔，在每个小时间间隔内，速度变化不大，可近似地看做匀速运动，与上例类似，可采用下面的方法来计算路程 s。

(1) 分割　在时间$[a,b]$内插入 $n-1$ 个分点。

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

把时间$[a,b]$分成 n 个小时间间隔

$$[t_0,t_1],[t_1,t_2],[t_2,t_3],\cdots,[t_{i-1},t_i],\cdots,[t_{n-1},t_n]$$

每个小时间间隔$[t_{i-1},t_i]$的长度记为 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$。

物体在每个小时间间隔里所走的路程记为 Δs_i。

(2) 求和 在每个小时间间隔$[t_{i-1},t_i]$上任取一点 ξ_i，在每个小时间间隔上用任一时刻 ξ_i 的速度 $v(\xi_i)(t_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant t_i)$来近似代替变化的速度 $v(t)$，从而得到 Δs_i 的近似值

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i$$

把 n 个小时间间隔上的路程的近似值相加，便得到物体在时间$[a,b]$上路程的近似值

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

(3) 取极限 记所有时间间隔的最大区间长度为 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$，当 $\lambda\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$ 的极限值就是路程 s 的精确值，即

$$s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

在上述两个例子中，虽然所要计算的量的实际意义不同，但是计算这两个量的思想方法、计算步骤却完全一样，并且最终都可归结为求一个和式的极限。对于这种和式的极限，在数学上把它抽象为函数的定积分。

5.1.2 定积分的概念

1. 定积分的定义

设函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，任取分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$，其长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$。在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上，任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$的和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

如果不论对区间$[a,b]$采取何种分法以及 ξ_i 如何选取，当最大小区间的区间长度 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$趋于零时，和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中，$f(x)$称为**被积函数**；$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**；x 称为**积分变量**；a 与 b 分别称为积分的**下限与上限**；$[a,b]$称为**积分区间**。

如果函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积。

关于定积分的概念，还应注意两点。

(1) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一个和式的极限，是一个确定的数值。定积分值只与被积函数 $f(x)$和积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量的记号无关，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

(2) 在定积分的定义中，总假定 $a<b$，为了以后计算方便起见，对于 $a>b$ 及 $a=b$ 的情况，给出以下补充定义。

当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$；

当 $a=b$ 时，$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$。

2. 定积分的几何意义

我们已经知道，在$[a,b]$上，若 $f(x)\geqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，两条直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积，即

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

在$[a,b]$上，若 $f(x)\leqslant 0$，这时由曲线 $y=f(x)$，两条直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示上述曲边梯形面积的相反数(见图 5-3)，即

$$A=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

在$[a,b]$上，若 $f(x)$既可取正值又可取负值时，则位于 x 轴上方的积分与面积同号，位于 x 轴下方的积分与面积异号，因此定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是各个部分曲边梯形面积的代数和(见图 5-4)，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A_1-A_2+A_3$$

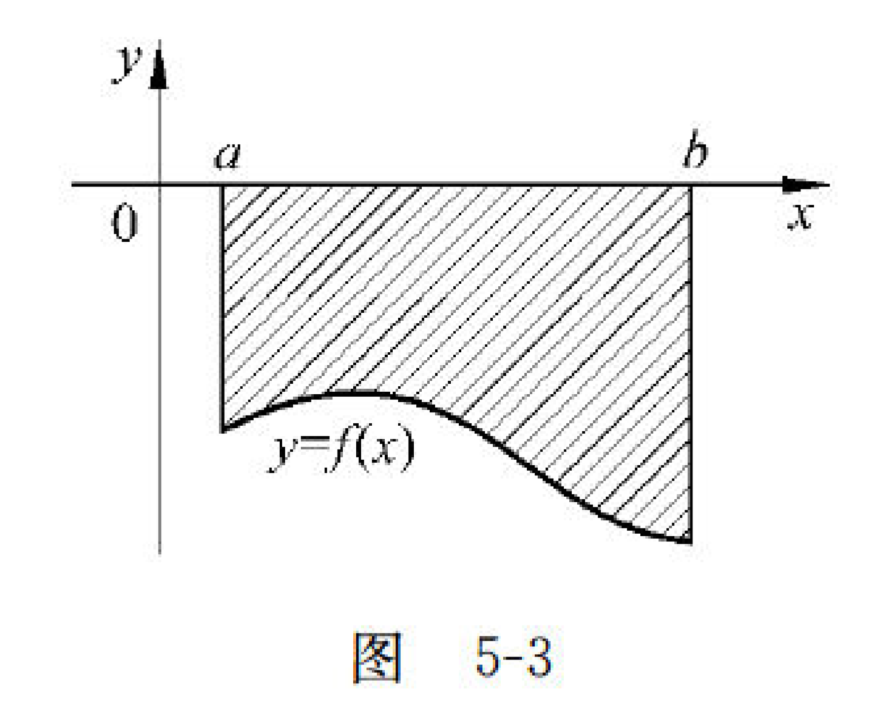


图 5-3

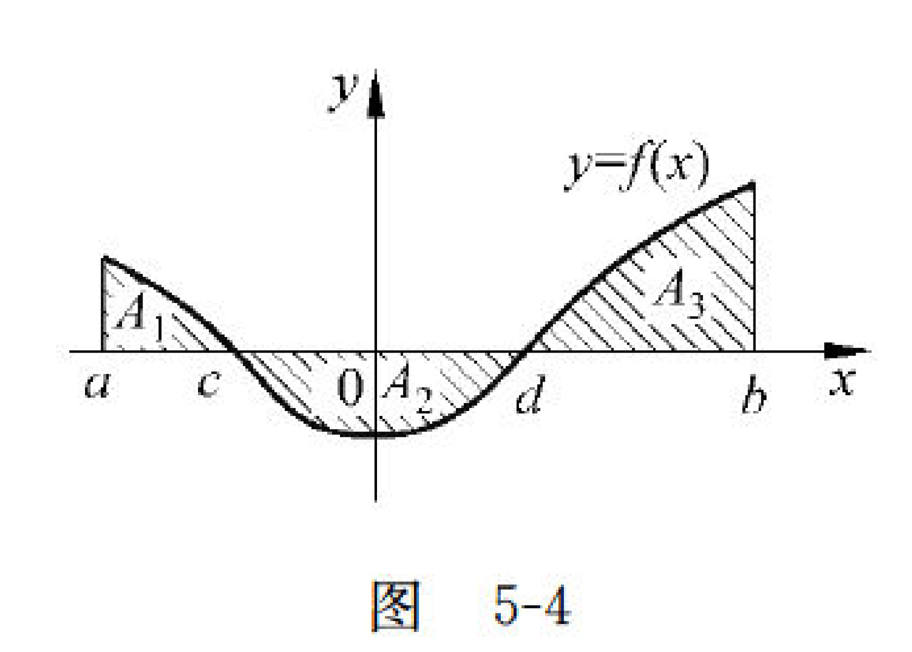


图 5-4

5.1.3 定积分的性质

由定积分的定义和极限的运算法则，可以推出定积分有以下性质。为了叙述方便起见，假设所讨论的函数都是可积的。

性质 1　两个函数的和(或差)的定积分等于这两个函数定积分的和(或差),即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

性质 2　被积函数的常数因子可以提到积分号的外面,即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\quad k\text{ 为常数}$$

性质 1、性质 2 还可以推广到有限个函数代数和(或差)的形式,即

$$\begin{aligned}&\int_a^b [k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x) \pm \cdots \pm k_n f_n(x)]\mathrm{d}x\\ =\ & k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x \pm \cdots \pm k_n\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

性质 3　如果在$[a,b]$上,若 $f(x)=1$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = b-a$$

性质 4　(**定积分的区间可加性**)如果区间$[a,b]$被分点 c 分成两个区间$[a,b]$和$[b,c]$(c 也可以是外分点),则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

性质 5　(**定积分保号性**)如果函数 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上可积,且 $f(x)\leqslant g(x)$,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

推论　如果 $f(x)$在$[a,b]$上可积,且 $f(x)\geqslant 0$,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

性质 6　(**估值定理**)设 M 和 m 分别是函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值和最小值,则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

性质 7　(**定积分中值定理**)如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a),\quad a\leqslant \xi \leqslant b$$

它的几何解释是:在$[a,b]$上的曲边梯形的面积等于同一底边,而高为 $f(\xi)$的矩形的面积,如图 5-5 所示。

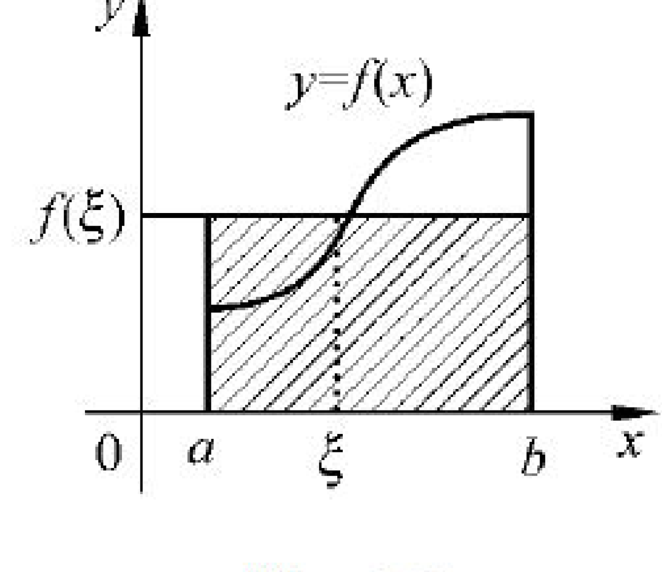


图　5-5

【例 5-1】　已知 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1-\dfrac{x}{2}, & x\geqslant 0\end{cases}$,求 $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$。

解:由于被积函数是分段函数,所以根据性质 3 有

$$\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 (1+x)\mathrm{d}x + \int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

利用定积分的几何意义,可分别求出

$$\int_{-1}^{0}(1+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad \int_{0}^{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=1$$

所以有

$$\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

【例 5-2】 估计定积分$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$的值。

解：因为$f(x)=\frac{1}{1+x^4}$在区间$[-1,1]$上的最大值和最小值分别为 1 和$\frac{1}{2}$，所以由性质 6 得

$$1\leqslant\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x\leqslant 2$$

应用模块 5.1

应用 1 【汽车行驶】一辆汽车以速度$v(t)=3t+5$(m/s)做直线运动，试用定积分表示汽车在$t_1=1$s 到$t_2=3$s 期间所经过的路程 s，并利用定积分的几何意义求出 s 的值。

解：根据题意，被积函数为$v(t)=3t+5$，时间间隔$[1,3]$的两端点即为积分下、上限，积分变量为时间 t。由定积分的定义，汽车运行的路程是时间 t 在时间间隔$[1,3]$上的定积分，即$s=\int v(t)\mathrm{d}t=\int_{1}^{3}3t+5\mathrm{d}t$。

又因为被积函数$v(t)=3t+5$的图像是一条直线，由定积分的几何意义知，所求路程 s 是上底为$v(1)=3\times1+5=8$，下底为$v(3)=3\times3+5=14$，高为 1 的梯形面积。即$s=\int_{1}^{3}3t+5\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(8+14)\times(3-1)=22$。

应用 2 【路程多少】一辆汽车和一辆电动自行车从同一地点同时出发，假设汽车的运动速度为$v_1(t)=\sqrt{4-(t-2)^2}$，自行车的运动速度为$v_2(t)=\frac{1}{2}t$，求两物体运动 2h 时汽车比自行车多走的路程。

解：如图 5-6 所示，设汽车与自行车运动的始点为原点，则汽车运动的速度曲线为以(2,0)为圆心，半径为 2 的上半个圆，自行车运动的速度曲线为经过原点且斜率为$\frac{1}{2}$的直线。由定积分的几何意义可知，汽车 2 小时的运动路程为速度$v_1(t)$在时间间隔$[0,2]$上的定积分，即

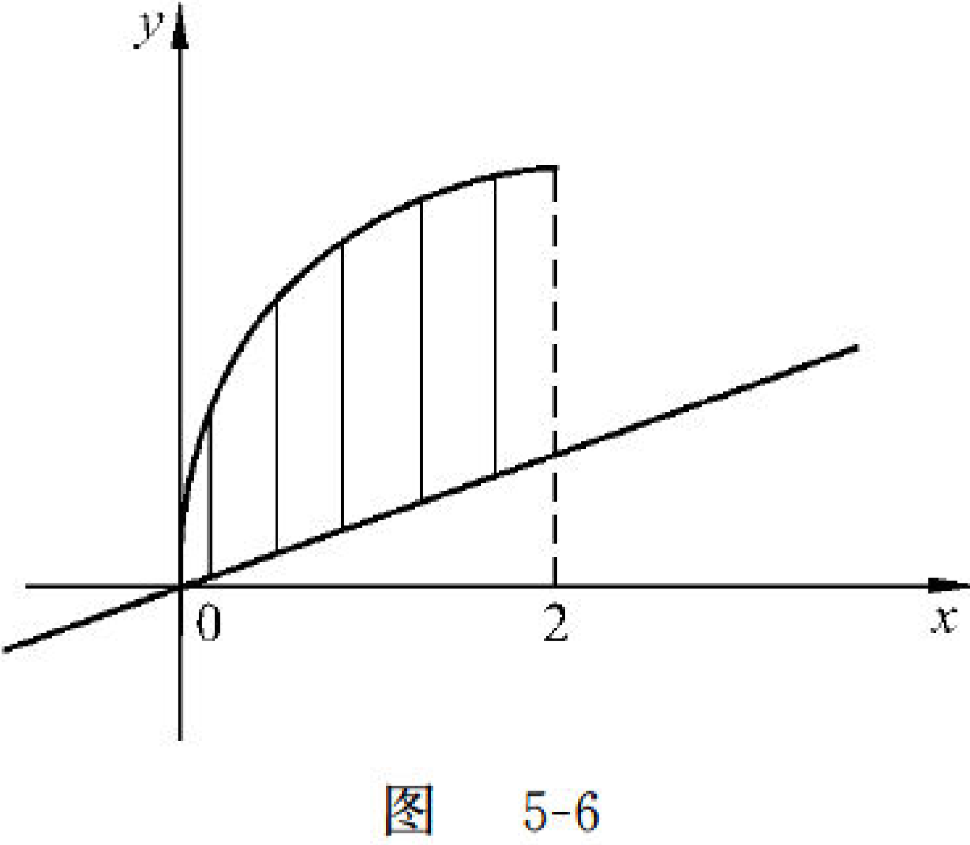


图 5-6

$$s_1=\int_{0}^{2}\sqrt{4-(t-2^2)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\pi\times2^2=\pi\left(\text{圆面积的}\frac{1}{4}\right)$$

自行车 2h 的运动路程为

$$s_2=\int_{0}^{2}\frac{1}{2}t\mathrm{d}t=1(\text{直角三角形的面积})$$

因此运动 2h,汽车比自行车多走的路程为

$$s=s_1-s_2=\int_0^2\sqrt{4-(t-2)^2}\,\mathrm{d}t-\int_0^2\frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t=\pi-1\approx 2.14$$

应用 3　【自由落体】已知自由落体的运动速度为 $v=gt$,求物体在运动开始 5s 内下落的距离。

解:由变速运动路程的定积分算法,即

$$s=\int_0^5 gt\,\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\Big|_0^5=\frac{1}{2}g\cdot 5^2-\frac{1}{2}g\cdot 0^2=\frac{25}{2}g$$

应用 4　【飞机着陆】测得一架飞机着陆时的水平速度为 500km/h,假定这架飞机着陆后的加速度 $a=-20\mathrm{m/s^2}$。问从开始着陆到飞机完全停止,飞机滑行了多少距离?

解:由题意 $v(0)=500\mathrm{km/h}=\frac{1250}{9}\mathrm{m/s}$。因为飞机制动后是匀减速直线运动,因此

$$v(t)=v(0)+at=\frac{1250}{9}-20t$$

飞机完全停止时 $v(t)=0$,得 $t=\frac{125}{18}$。因此在这段时间内飞机滑行距离为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{\frac{125}{18}}v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{125}{18}}\left(\frac{1250}{9}-20t\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1250}{9}t-10t^2\Big|_0^{\frac{125}{18}}=\frac{78125}{162}\approx 482.3(\mathrm{m})\end{aligned}$$

即该飞机滑行约 482.3m 后完全停止。

实践模块 5.1

A 组(基础训练)

1. 填空题。

(1) 由直线 $y=1$,$x=a$,$x=b$ 及 x 轴围成图形的面积等于________,用定积分表示为________。

(2) 一物体以速度 $v=2t+1$ 做直线运动,该物体在时间区间[0,3]内所经过的路程 s 用定积分表示为________。

(3) 定积分 $\int_{-2}^{3}\cos 2t\,\mathrm{d}t$ 中,积分上限是________,积分下限是________,积分区间是________。

(4) $\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=$ ________。

2. 利用定积分的几何意义,计算下列定积分。

(1) $\int_0^4(2x+1)\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

B 组(能力提高训练)

1. 比较下列定积分的大小。

(1) $\int_1^2 x^2 dx$ 与 $\int_1^2 x^3 dx$　　(2) $\int_1^e \ln x dx$ 与 $\int_1^e \ln^2 x dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$　　(4) $\int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x dx$ 与 $\int_0^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x dx$

2. 估计下列定积分的值。

(1) $\int_1^e \ln x dx$　　(2) $\int_1^2 x^3 dx$

3. 利用定积分的几何意义,计算下列定积分。

(1) $\int_0^3 |2-x| dx$

(2) $\int_{-1}^1 f(x)dx$,其中 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \sqrt{1-x^2}, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$。

4. 用定积分表示如图 5-7 所示各图中阴影部分的面积。

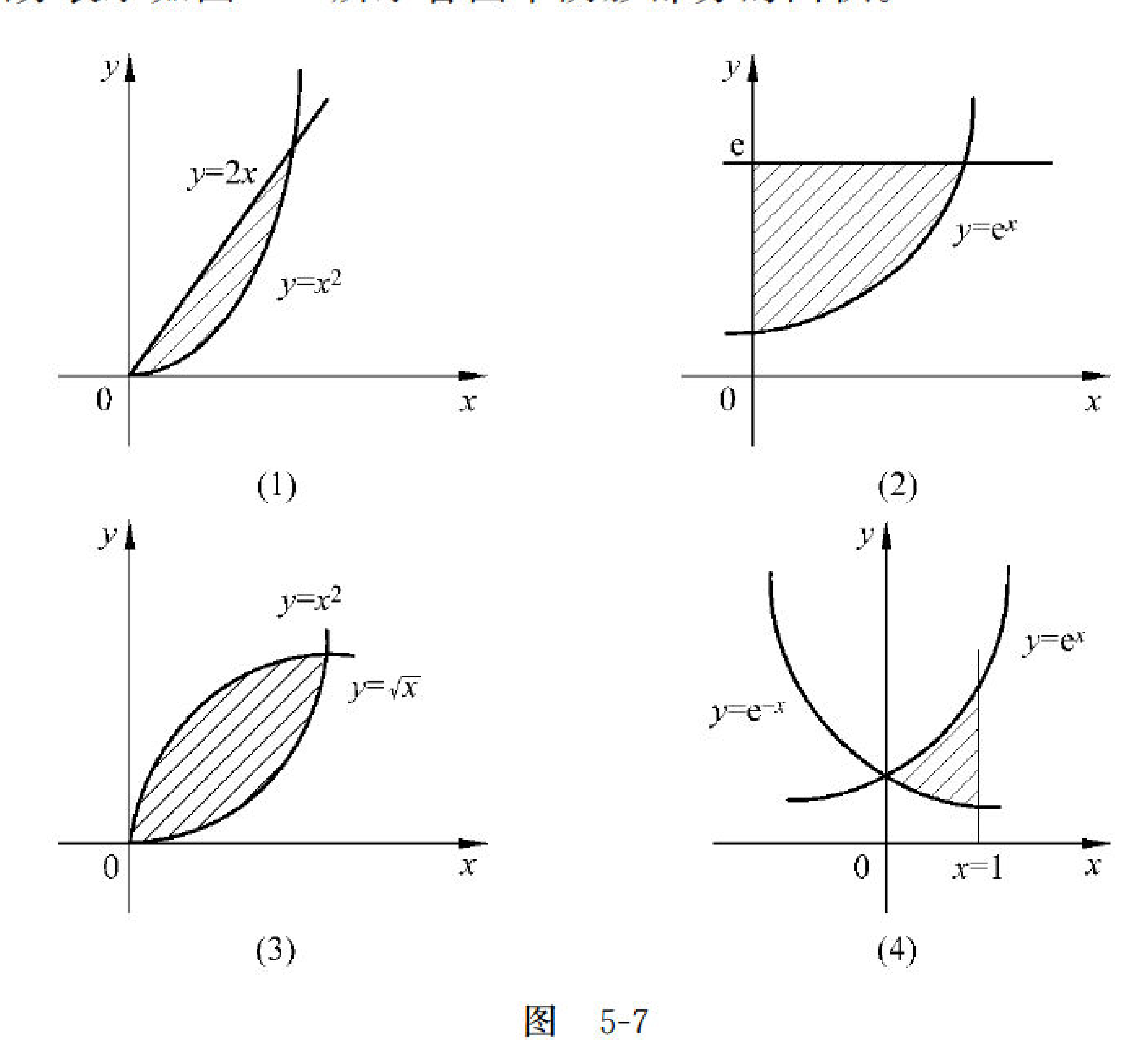


图 5-7

知识模块 5.2 定积分的计算

学习任务

【知识目标】

(1) 掌握微积分基本公式。

(2) 掌握定积分的换元积分法和分部积分法。

【能力目标】

(1) 能掌握牛顿-莱布尼茨公式。

(2) 能运用定积分的换元积分法和分部积分法进行定积分的计算。

【学习重点】

微积分基本公式;定积分的换元积分法和分部积分法。

【学习难点】

换元积分法。

按照定积分的定义计算定积分的值是十分麻烦的,有时甚至无法计算。为了寻求计算定积分的简单方法,我们先回顾做变速直线运动物体的路程问题。

如果物体以速度 $v=v(t)$ 做直线运动,那么在时间$[a,b]$上所经过的路程为

$$s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$$

如果物体经过的路程 s 是时间 t 的函数 $s(t)$,那么物体从 $t=a$ 到 $t=b$ 所经过的路程为 $s=s(b)-s(a)$。

从而有

$$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t=s(b)-s(a)$$

根据导数的物理意义,可知 $s'(t)=v(t)$,即 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的一个原函数,所以求定积分 $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ 等于先求被积函数 $v(t)$ 的一个原函数 $s(t)$,然后代入上限与下限求差值即可。

如果忽略此问题的物理意义,便可得到计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的一般方法。

5.2.1　牛顿-莱布尼茨公式

定理 5-1　(**微积分基本定理**)设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

上式称为**牛顿-莱布尼茨公式**,也叫作**微积分基本公式**。

这个公式建立了定积分与不定积分之间的联系,把定积分的计算转化为求不定积分的计算,即先找出被积函数的一个原函数,然后再将上、下限分别带入求差值即可,从而使定积分的计算得以简化。

【例 5-3】　求 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$。

解: $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$

【例 5-4】　求 $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解：$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\arctan 1-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$

【例 5-5】 求 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$。

解：$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【例 5-6】 求 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$。

解：$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$

注意：利用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分时，要求被积函数在积分区间上连续，否则会产生错误。

例如：计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$，显然是错误的，因为被积函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在区间[-1,1]上不连续，不满足牛顿-莱布尼茨公式条件，所以不能直接应用。

5.2.2 定积分的换元积分法

有了不定积分的换元积分法和牛顿-莱布尼茨公式作基础，下面我们进一步来讨论定积分的换元积分法。

【例 5-7】 求 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$。

解：由牛顿-莱布尼茨公式可知，先求不定积分 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ 的原函数。

令 $x=a\sin t$，则

$$dx=a\cos t dt$$

于是有

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}dx&=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t dt\\&=a^2\int\cos^2 t dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt\\&=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C\end{aligned}$$

然后代入上、下限，可得

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi a^2}{4}$$

显然这样求定积分的值比较麻烦，现在我们在计算定积分的过程中直接运用换元法。

仍令 $x=a\sin t$，$dx=a\cos t dt$，此时积分的上、下限也要做变换。由于当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$。

因此对 x 而言,积分区间是$[0,a]$,代换后对 t 而言,积分区间却是$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以有

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

比较这两种方法,可见后一种要比前一种简单些,因此给出下面的定理。

定理 5-2　设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且函数 $x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续导数,当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时,有 $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$,又 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

上述公式称为**定积分的换元积分公式**。

【例 5-8】　求 $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解:设 $\sqrt{x}=t$,则

$$x = t^2,\quad \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$$

当 $x=0$ 时,$t=0$;当 $x=4$ 时,$t=2$。于是有

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= 2[t-\ln(1+t)]\Big|_0^2 \\ &= 4-2\ln 3\end{aligned}$$

【例 5-9】　求 $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$。

解:设 $\sqrt{1+x}=t$,则

$$x = t^2-1,\quad \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$$

当 $x=0$ 时,$t=1$;当 $x=3$ 时,$t=2$。于是有

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t}2t\mathrm{d}t = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3}$$

应用换元积分公式计算定积分时,须**注意**:用 $x=\varphi(t)$把原来的积分变量 x 代换成新变量 t 时,积分限也要换成相应于新变量 t 的积分限,即“**换元必换限**”。

【例 5-10】　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos x\mathrm{d}x$。

解:设 $\sin x=t$,则

$$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sin x = \mathrm{d}t$$

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\frac{\pi}{2}$时，$t=1$。于是有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos x\mathrm{d}x = \int_0^1 t^4\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5}\bigg|_0^1 = \frac{1}{5}$$

例 5-10 如果用凑微分法和牛顿-莱布尼茨公式求定积分可以更方便些，既不引入新的积分变量，积分的上、下限也不需要作相应的变换，也就是说“不换元也不换限”。即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\mathrm{d}\sin x = \frac{1}{5}\sin^5 x\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}$$

【例 5-11】 求 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$。

解： $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}}(1+\ln x)\mathrm{d}(1+\ln x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2\bigg|_1^{\mathrm{e}} = \frac{3}{2}$

定积分 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 在对称区间$[-a,a]$上还有如下性质。

(1) 若 $f(x)$在$[-a,a]$上连续，且为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 若 $f(x)$在$[-a,a]$上连续，且为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

利用上述性质，可以简化奇、偶函数在对称区间上的积分计算。

【例 5-12】 求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$。

解： 因为 $f(x)=\frac{x}{1+\cos x}$在对称区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上是奇函数，所以

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = 0$$

5.2.3 定积分的分部积分法

由不定积分的分部积分公式及牛顿-莱布尼茨公式，可得到下面的定理。

定理 5-3 设函数 $u(x)$，$v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数，那么

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\bigg|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

上述公式称为**定积分的分部积分公式**。

【例 5-13】 求 $\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x$。

解： $\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\mathrm{d}\sin x = x\sin x\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = 0+\cos x\bigg|_0^{\pi} =-2$

【例 5-14】 求 $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$。

解： $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x\bigg|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}-\mathrm{e}^x\bigg|_0^1 = \mathrm{e}-(\mathrm{e}-1) = 1$

【例 5-15】 求 $\int_{0}^{e-1}\ln(1+x)dx$。

解：
$$\begin{aligned}\int_{0}^{e-1}\ln(1+x)dx &= x\ln(1+x)\Big|_{0}^{e-1} - \int_{0}^{e-1}\frac{x}{1+x}dx \\ &= (e-1) - \int_{0}^{e-1}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx \\ &= (e-1)-[x-\ln(1+x)]\Big|_{0}^{e-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

应用模块 5.2

应用 1 【石油产量】中原油田一口新井的原油产出率 $R(t)$（t 的单位为年）为

$$R(t) = 1 - 0.02t\sin(2\pi t)$$

求开始三年内生产的石油总量。

解：设开始三年内生产的石油总量为 W，则 $\frac{dW}{dt}=R(t)$。由产出率求石油总量得

$$\begin{aligned}W &= \int_{0}^{3}1-0.02t\sin(2\pi t)dt \\ &= \int_{0}^{3}dt + \frac{0.01}{\pi}\int_{0}^{3}td[\cos(2\pi t)] \\ &= t\Big|_{0}^{3} + \frac{0.01}{\pi}\left[t\cos(2\pi t)\Big|_{0}^{3} - \int_{0}^{3}\cos(2\pi t)dt\right] \\ &= 3 + \frac{0.01}{\pi}\left[3 - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\Big|_{0}^{3}\right] \\ &= 3 + \frac{0.03}{\pi} \approx 3.0095\end{aligned}$$

应用 2 【捕鱼成本】在鱼塘中捕鱼时，鱼越少捕鱼越困难，捕捞的成本也就越高，一般可以假设每公斤鱼的捕捞成本与当时池塘中的鱼量成反比。假设当鱼塘中有 x 公斤鱼，每公斤的捕捞成本是$\frac{2000}{10+x}$元。已知鱼塘中现有鱼 10000 公斤，问从鱼塘中捕捞 6000 公斤鱼所花费的成本是多少？

解：根据题意，当塘中鱼量为 x 时，捕捞成本函数为

$$C(x) = \frac{2000}{10+x},\quad x>0$$

假设塘中现有鱼量为 A，需要捕捞的鱼量为 T。当我们已经捕捞了 x 公斤鱼之后，塘所剩的鱼量为 $A-x$，此时再捕捞 Δx 公斤鱼所需的成本为

$$\Delta C = C(A-x)\Delta x = \frac{2000}{10+(A-x)}\Delta x$$

因此，捕捞 T 公斤鱼所需成本为

$$C=\int_{0}^{T}\frac{2000}{10+(A-x)}dx$$

$$= -2000\ln[10+(A-x)]\Big|_0^T$$

$$= 2000\ln\frac{10+A}{10+(A-T)}(\text{元})$$

将已知数据 $A=10000\text{kg}$，$T=6000\text{kg}$ 代入，可计算出总捕捞成本为

$$C = 2000\ln\frac{10010}{4010} \approx 1829.59(\text{元})$$

从而可以计算出每公斤鱼的平均捕捞成本

$$C = \frac{1829.59}{6000} \approx 0.30(\text{元})$$

应用 3 【机器转售时机】新河机械厂更新设备，转让机器。由于折旧因素，机器转售价格 $R(t)$ 是时间 t(周)的减函数 $R(t)=\frac{3A}{4}e^{-\frac{t}{96}}$(元)。其中，$A$ 是机器的最初价格。在任何时间 t，机器开动就能产生 $P=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}$ 的利润。问机器使用了多长时间后转售出去能使总利润最大？最大利润是多少？机器卖了多少钱？

解：假设机器使用了 x 周后出售，此时的售价是 $R(x)=\frac{3A}{4}e^{-\frac{x}{96}}$，在这段时间内机器创造的利润是 $\int_0^x \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}dt$。于是，问题就成了求总收入 $f(x)=\frac{3A}{4}e^{-\frac{x}{96}}+\int_0^x \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}dt\ (x\in(0,\infty))$ 的最大值。

由 $f'(x)=\frac{3A}{4}e^{-\frac{x}{96}}\cdot\left(-\frac{1}{96}\right)+\frac{A}{4}e^{-\frac{x}{48}}=0$

求得 $e^{-\frac{x}{96}}=\frac{1}{32}$，$e^{\frac{x}{96}}=32$，$x=96\ln 32$

当 $x\in(0,96\ln 32)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(96\ln 32,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，又 $96\ln 32$ 是 $f(x)$ 的唯一极值点，所以它是最大值点，$x\approx 333$ 周，此时总收入

$$f(333) = \frac{3A}{4}e^{-32}+\frac{A}{4}\int_0^{96\ln 32} e^{-\frac{t}{48}}dt \approx 12.01A(\text{元})$$

总利润 $$P=f(333)-A=11.01A$$

机器卖了 $\frac{3}{4}Ae^{-\frac{x}{96}}\Big|_{x=96\ln 32}=\frac{3A}{128}$(元)

应用 4 【人口统计模型】东洋市 1990 年的人口密度近似为 $P(r)=\frac{4}{r^2+20}$。表示距市中心 $r$km 区域内的人口数，单位为 10 万人/km^2。试求距市中心 2km 区域内的人口数。

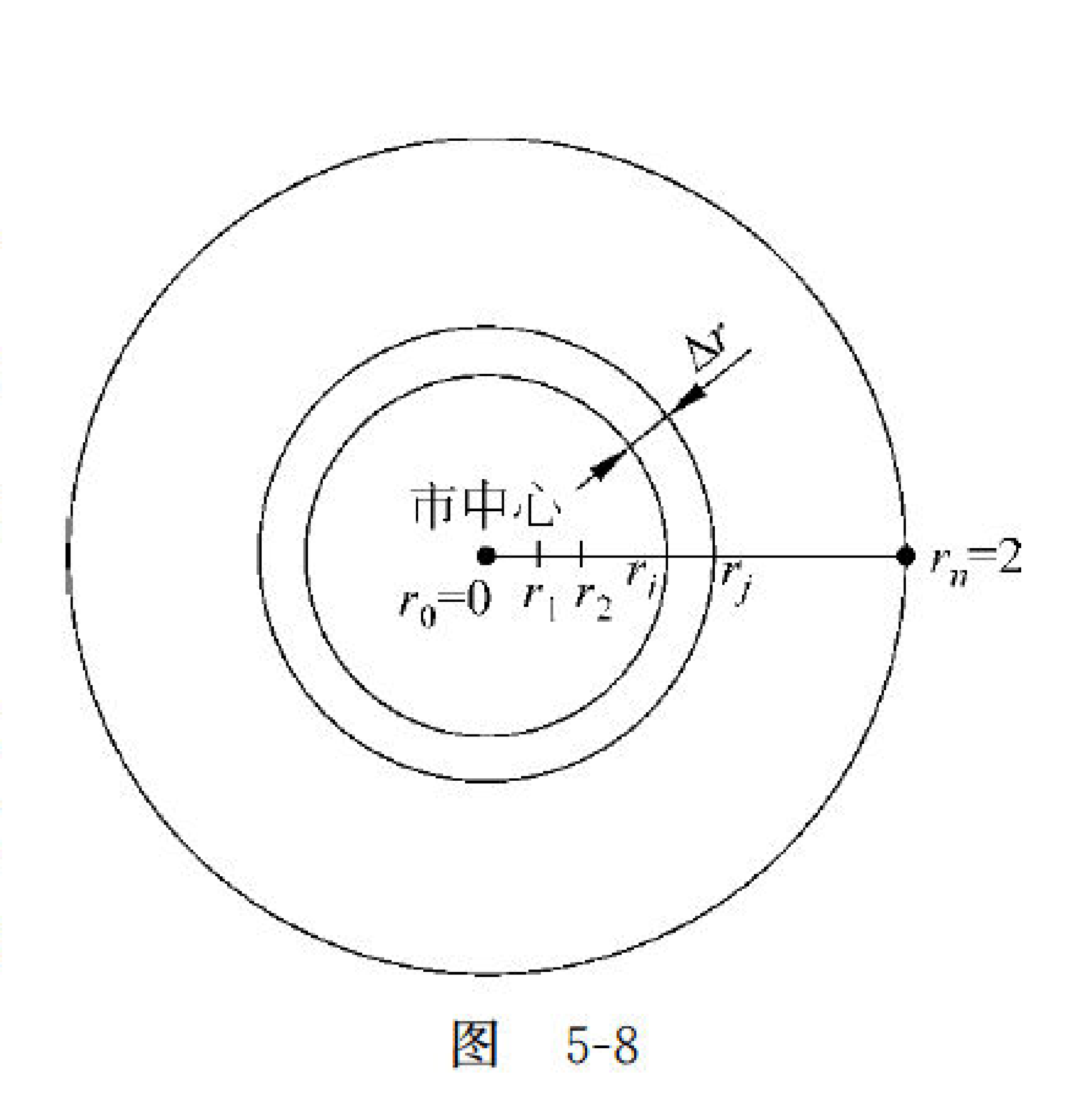


图 5-8

解：假设我们从城市中心画一条放射线，把这条线上从 0 到 2 之间均分成 n 个小区间，每个小区间的长度为 Δr，每个小区间确定了一个环，如图 5-8 所示。

估算每个环中的人口数并把它们相加，就得到了总人口数，第 j 个环的面积为：

$$\begin{aligned}\pi r_j^2 - \pi r_{j-1}^2 &= \pi r_j^2 - \pi(r_j - \Delta r)^2 \\ &= \pi r_j^2 - \pi(r_j^2 - 2r_j\Delta r + (\Delta r)^2) \\ &= 2\pi r_j \Delta r - \pi(\Delta r)^2\end{aligned}$$

当 n 很大时，Δr 很小，$\pi\Delta r^2$ 相对于 $2\pi r_j\Delta r$ 来说很小，可忽略不计，所以此环的面积近似为 $2\pi r_j\Delta r$。在第 j 个环内，人口密度可看成常数 $P(r_j)$，所以此环内的人口数近似为

$$P(r_j)2\pi r_j\Delta r$$

距市中心 2km 区域内的人口数近似为

$$\sum_{j=1}^{n} P(r_j)\cdot 2\pi r_j \Delta r$$

即人口数

$$\begin{aligned}N &= \int_0^2 P(r)2\pi r\mathrm{d}r \\ &= \int_0^2 2\pi\frac{4}{r^2+20}r\mathrm{d}r \\ &= 4\pi\int_0^2 \frac{2r}{r^2+20}\mathrm{d}r = 4\pi\ln(r^2+20)\Big|_0^2 \\ &= 4\pi\ln\frac{24}{20} \approx 2.291(10\text{ 万人})\end{aligned}$$

距市中心 2km 区域内的人口数大约为 229100。

实践模块 5.2

A 组（基础训练）

1. 求下列定积分。

(1) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$　　(2) $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^\pi \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

2. 利用换元积分法计算下列定积分。

(1) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$　　(2) $\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$

3. 利用分部积分法计算定积分。

(1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　(2) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$

B 组（能力提高训练）

1. 求下列定积分。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$　　(4) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

2. 利用换元积分法计算下列定积分。

(1) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$　　(2) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

(3) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$　　(4) $\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$

3. 利用分部积分法计算定积分。

(1) $\int_0^1 x\arctan x dx$　　(2) $\int_0^1 \arcsin x dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$　　(4) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$

知识模块 5.3　定积分的应用

学习任务

【知识目标】

理解定积分的微元法。

【能力目标】

(1) 能用定积分表达一些几何量,会用定积分表达一些物理量。

(2) 能用定积分的微元法讨论平面图形的面积和绕坐标轴旋转的体积问题。

【学习重点】

定积分的微元法;平面图形的面积和绕坐标轴旋转的体积问题。

【学习难点】

用定积分表达一些几何量和物理量。

定积分不仅限用于分析和解决曲边梯形的面积和变速直线运动的路程的问题,在几何、物理等领域的诸多方面也有着广泛的应用。在定积分的应用中,经常采用的方法是微元法。本节将利用微元法来解决平面图形的面积和旋转体的体积以及在物理方面的应用问题。

5.3.1　微元法

为了说明这种方法,我们先回顾曲边梯形面积的求法。

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,则以曲线 $y=f(x)$ 为曲边,$[a,b]$ 为底的曲边梯形的面积 A 可表示为

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

计算的具体步骤是:

(1) 任取分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把曲边梯形的底分成 n 个小区间，每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$，过每个分点分别作 x 轴的垂线，把整个曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，其中第 i 个小曲边梯形的面积为 ΔA_i，于是有

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

(2) 在第 i 个小曲边梯形的底 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，以 $f(\xi_i)$ 代替变动的高 $f(x)$，用相应小矩形的面积近似代替小曲边梯形面积，即

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

把 n 个小矩形面积相加即得曲边梯形面积 A 的近似值，即

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

(3) 记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，当 $\lambda\to0$ 时，这个和式极限就是曲边梯形面积 A，即

$$A=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

以上三个步骤中，第二步确定 $\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$ 是关键。

为方便起见，省略下标 i，用 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 表示任一小区间，并取这个小区间的左端点 x 为 ξ，这样，以点 x 处的函数值 $f(x)$ 为高、$\mathrm{d}x$ 为底的矩形面积 $f(x)\mathrm{d}x$ 就是区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的小曲边梯形面积的近似值(如图 5-9 所示阴影部分)，即

$$\Delta A\approx f(x)\mathrm{d}x$$

其中，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为面积微元，记为 $\mathrm{d}A$，即

$$\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$$

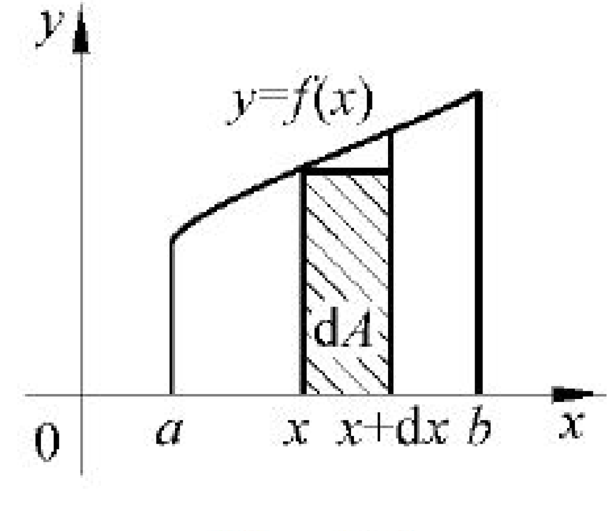


图 5-9

于是

$$A\approx\sum f(x)\mathrm{d}x$$

则

$$A=\lim\sum f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

一般地，如果某一实际问题中的所求量 V 符合下列条件。

(1) V 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量。

(2) V 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性。

(3) 部分量 ΔV_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$。

那么就可考虑用定积分来表达 V 量。

具体做法如下。

(1) 根据题意选取积分变量(假设 x 为积分变量)，确定积分区间 $[a,b]$。

(2) 在区间 $[a,b]$ 上任取一个小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，找出所求量的部分量在其上的近似值 $\mathrm{d}V=f(x)\mathrm{d}x$。

(3) 以 $\mathrm{d}V=f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在区间 $[a,b]$ 上作积分，得

$$V=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这种方法称为**微元法**。在使用微元法解决实际问题时,关键在于寻找正确的微元变量。下面我们就用微元法来讨论定积分的一些具体应用。

5.3.2 平面图形的面积

【例 5-16】 求由两条抛物线 $y^2=x$ 及 $y=x^2$ 所围成的图形的面积。

解:(1) 作草图(见图 5-10)确定积分变量为 x。

解方程组
$$\begin{cases} y^2=x \\ y=x^2 \end{cases}$$

得交点为(0,0)及(1,1),从而可知积分区间为[0,1]。

(2) 在区间[0,1]上任取一个小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,得面积微元为 $\mathrm{d}A=(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x$。

(3) 在区间[0,1]上取定积分,便得所求面积为

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

5.3.3 旋转体的体积

旋转体指的是由一个平面图形绕着平面内一条直线旋转一周而成的立体,这条直线叫作**旋转轴**。常见的旋转体有圆柱、圆锥、圆台、球体等。

图 5-11 所示旋转体都可以看作是由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体。

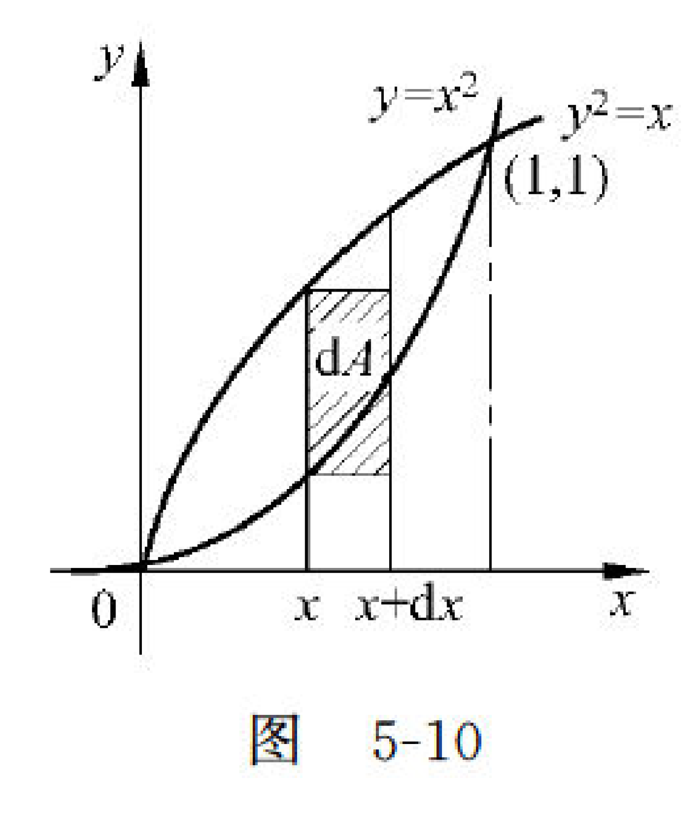


图 5-10

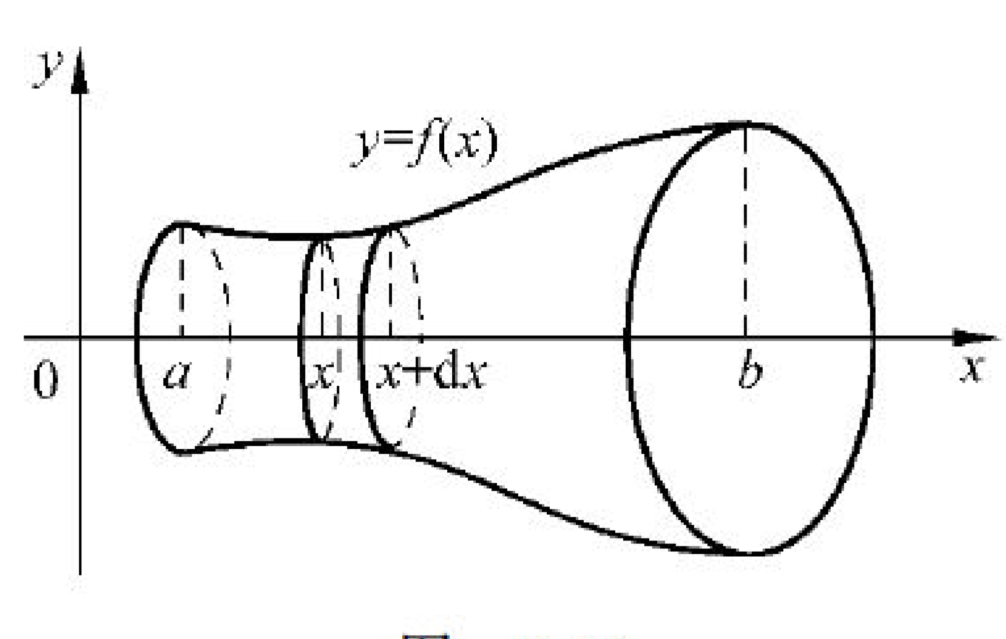


图 5-11

下面用定积分的微元法求旋转体的体积。

(1) 选取横坐标 x 为积分变量,它的变化区间为$[a,b]$。

(2) 相应于$[a,b]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积近似于以 $f(x)$为底半径、$\mathrm{d}x$ 为高的扁圆柱体的体积,即体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

(3) 以 $\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$ 为被积表达式,在$[a,b]$上作定积分,便得所求旋转体的体积为

$$V=\int_a^b\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

类似地可以得到,由连续曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d(c<d)$及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成立体的体积为

$$V=\int_c^d\pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$$

【例 5-17】 证明底面半径为 r,高为 h 的圆锥体的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$。

证明：圆锥体可以看成由直线 $y=\frac{r}{h}x$、$x=h$ 及 x 轴围成的三角形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体,如图 5-12 所示。

(1) 取积分变量为 x,则积分区间为$[0,h]$。

(2) 在$[0,h]$上任取一个小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,与它对应的薄片体积近似于以$\frac{r}{h}x$ 为半径,$\mathrm{d}x$ 为高的薄片圆柱体的体积,即体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x$$

(3) 于是圆锥体的体积为

$$V=\int_0^h\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

【例 5-18】 求由 $x^2+y^2=2$ 和 $y=x^2$ 所围成的图形(如图 5-13 所示阴影部分)绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

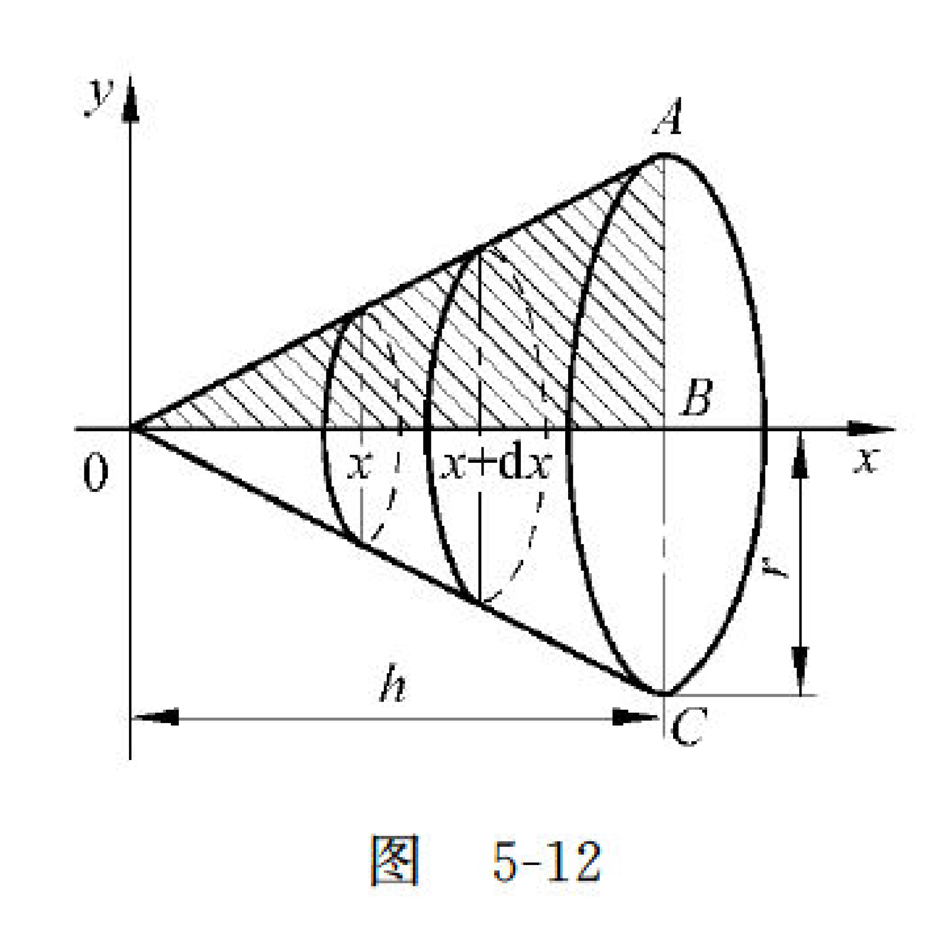


图　5-12

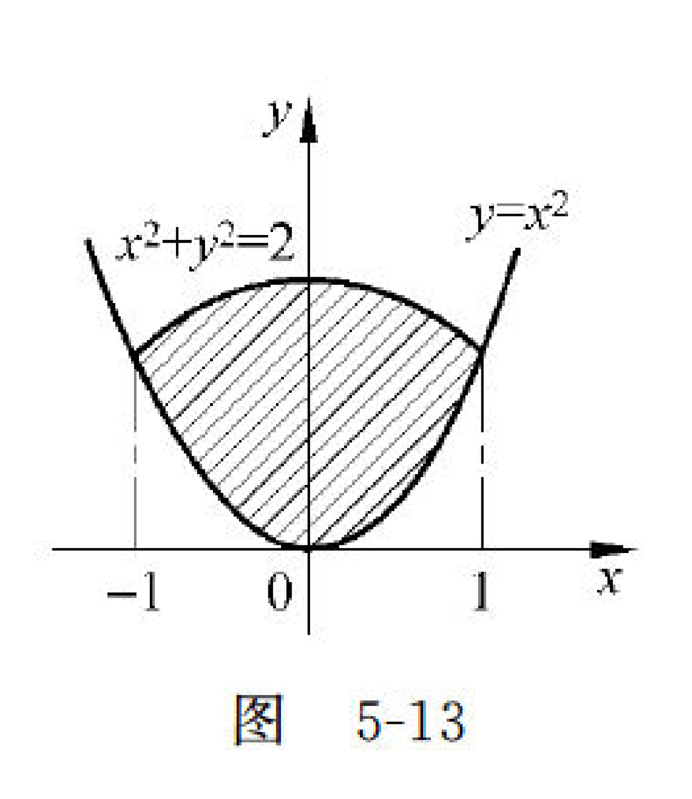


图　5-13

解：(1) 取积分变量为 x。

解方程组
$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ y=x^2\end{cases}$$
得交点坐标为$(-1,1)$和$(1,1)$,从而积分区间为$[-1,1]$。

(2) 在$[-1,1]$上任取一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,与它相应的薄片体积近似于 $\pi(2-x^2)\mathrm{d}x-\pi x^4\mathrm{d}x$,所以体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi[(2-x^2)-x^4]\mathrm{d}x$$

(3) 所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_{-1}^1(2-x^2-x^4)\mathrm{d}x=2\pi\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{44}{15}\pi$$

【例 5-19】 求由 $y=x^2$ 与 $y^2=x$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积,如图5-14所示。

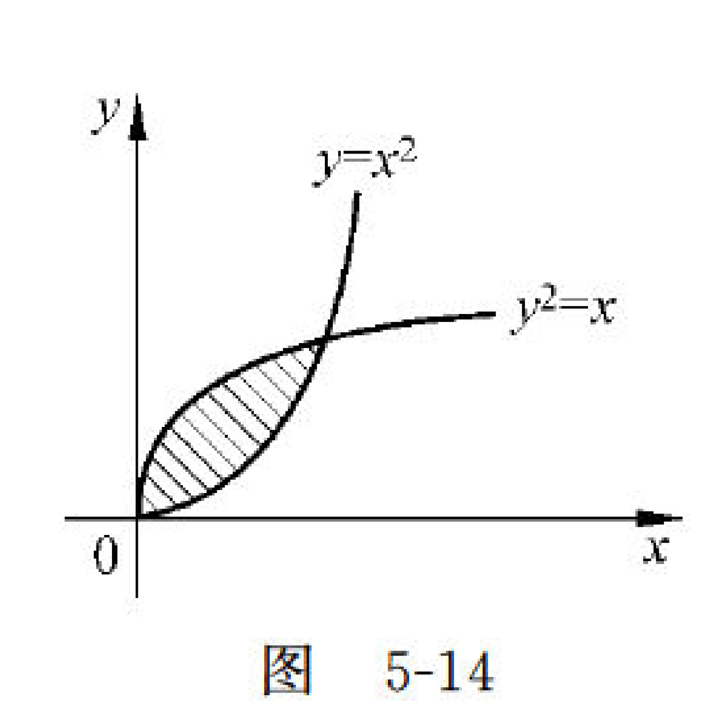


图　5-14

解：(1) 由于绕 y 轴旋转,取积分变量为 y。

解方程组
$$\begin{cases}y=x^2\\ y^2=x\end{cases}$$

得交点坐标为(0,0)和(1,1),则积分区间为[0,1]。

(2) 在[0,1]上任取一小区间[$y,y+\mathrm{d}y$],与它相应的薄片体积近似于 $\pi y\mathrm{d}y-\pi y^4\mathrm{d}y$,从而得体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi(y-y^4)\mathrm{d}y$$

(3) 所求旋转体得体积为

$$V=\pi\int_0^1(y-y^4)\mathrm{d}y=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{10}\pi$$

应用模块 5.3

应用 1 【公园的大小】充分利用土地进一步美化城市,某城市的街边公园形状由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成,求此公园的面积。

解法 1:(1) 作草图(见图 5-15)若确定积分变量为 x。

解方程组 $\begin{cases}y^2=2x\\y=x-4\end{cases}$

得交点为(2,−2)和(8,4),则积分区间为[0,8]。

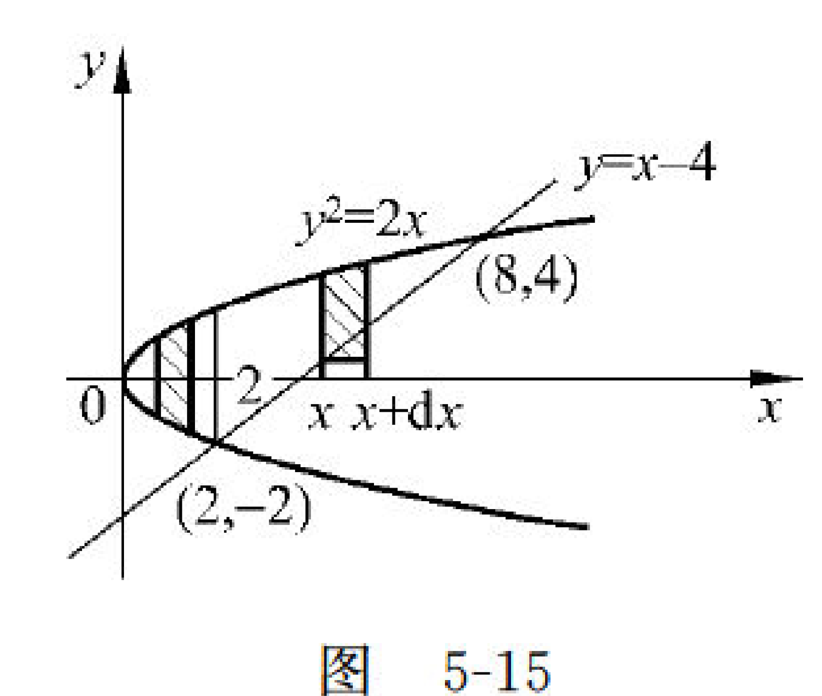


图 5-15

(2) 当 x 在[0,2]上变化时,面积微元为

$$\mathrm{d}A_1=[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})]\mathrm{d}x$$

当 x 在[2,8]上变化时,面积微元为

$$\mathrm{d}A_2=[\sqrt{2x}-(x-4)]\mathrm{d}x$$

(3) 所求面积为

$$\begin{aligned}A&=\int_0^2\mathrm{d}A_1+\int_2^8\mathrm{d}A_2\\&=\int_0^2[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})]\mathrm{d}x+\int_2^8[\sqrt{2x}-(x-4)]\mathrm{d}x\\&=\int_0^2 2\sqrt{2x}\mathrm{d}x+\int_2^8(\sqrt{2x}-x+4)\mathrm{d}x\\&=2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2+\left(\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_2^8\\&=18\end{aligned}$$

解法 2:(1) 若选取 y 为积分变量(见图 5-16),它的积分区间为[−2,4]。

(2) 面积微元为 $\mathrm{d}A=\left[(y+4)-\frac{y^2}{2}\right]\mathrm{d}y$。

(3) 所求面积为 $A=\int_{-2}^4\left[(y+4)-\frac{y^2}{2}\right]\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-2}^4=18$。

由上面的两种解法可以看出,解法 2 要比解法 1 简单得多,因此在用微元法解定积分时,适当地选取积分变量是关键。

应用 2　【儿童座椅】制作儿童座椅时，需准备一些塑料材料。其大体形状是由一个底半径为 R 的圆柱，被一个与圆柱底面交成 α 角且过底圆上直径的平面所截而得到，求该塑料材料的体积。

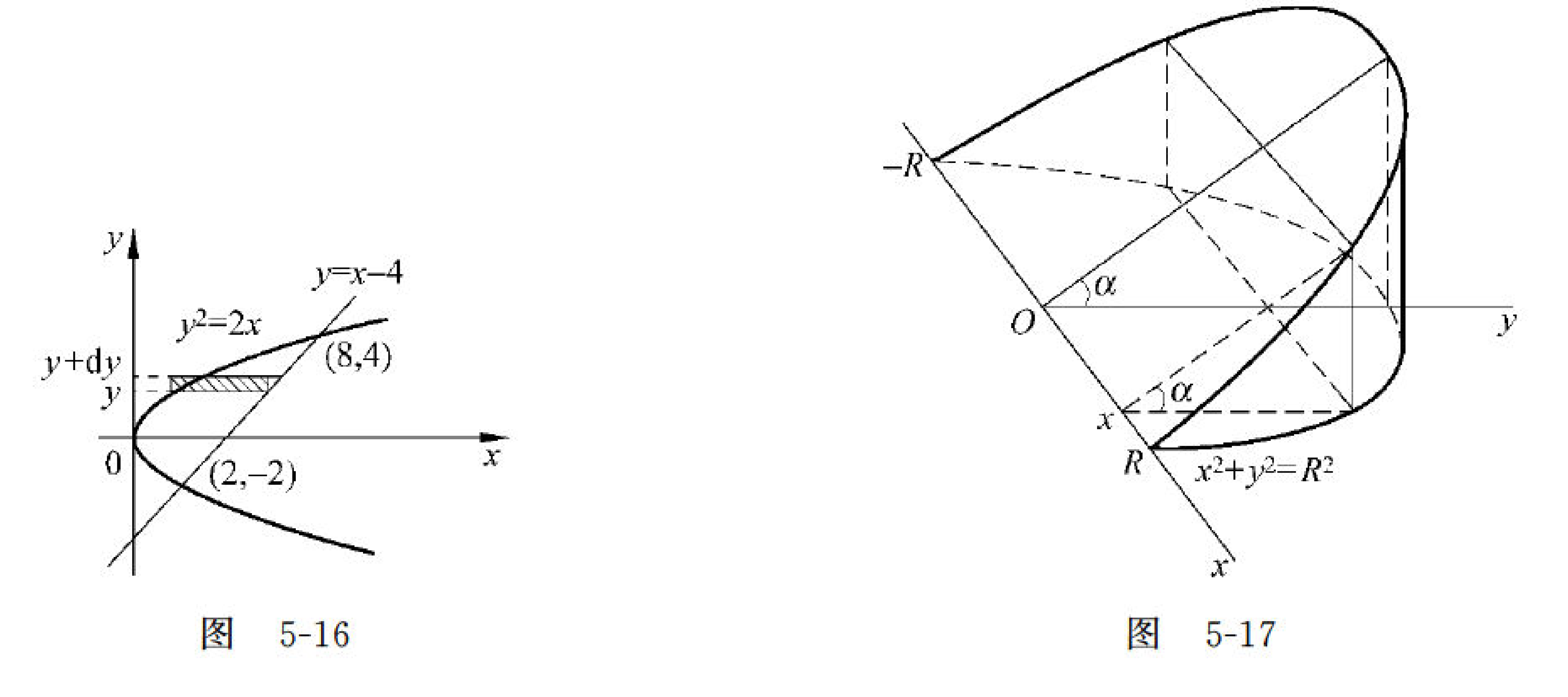


图　5-16　　　　图　5-17

解法 1：如图 5-17 所示，塑料材料的形状可视为楔体。将圆柱的底面置于 xOy 平面，则底面的方程为 $x^2+y^2=R^2$，过点 x 且垂直于 x 轴作平面与楔体相交，截得一个直角三角形，其两条直角边的长度分别为 y 与 $y\tan\alpha$，即其面积为

$$\begin{aligned}A(x)&=\frac{1}{2}y\cdot y\tan\alpha\\&=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha\\&=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\end{aligned}$$

于是，楔体 V 的体积微元为

$$\mathrm{d}V=\left[\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\right]\mathrm{d}x$$

对该微元在区间$[-R,R]$上积分，即得

$$\begin{aligned}V&=\int_{-R}^{R}\left[\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\right]\mathrm{d}x=\tan\alpha\int_0^R(R^2-x^2)\mathrm{d}x\\&=\tan\alpha\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha\end{aligned}$$

解法 2：如图 5-17 所示，过点 y 且垂于 y 轴作平面与楔体相交，截得一矩形，且其底为 $2x$，高为 $y\tan\alpha$，故矩形面积为

$$A(x)=2x\cdot y\tan\alpha=2y\sqrt{R^2-y^2}\tan\alpha$$

于是，楔体 V 的体积微元为 $\mathrm{d}V=(2y\sqrt{R^2-y^2}\tan\alpha)\mathrm{d}y$。

由于 y 作为积分变量，故积分区间为$[0,R]$，得

$$\begin{aligned}V&=\int_0^R(2y\sqrt{R^2-y^2}\tan\alpha)\mathrm{d}y\\&=-\tan\alpha\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}\sqrt{R-x^2}\end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{3}\tan\alpha\left[(R^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R$$

$$= \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

由此例的两种解法可知，用不同的平面去截同一已知立体，虽然产生的积分变量及体积微元表达式有所不同，但所求得的体积是一致的。

应用 3 【高尔夫球座】一个木制高尔夫球座(见图 5-18)大体上具有以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像为边界的区域绕 OX 轴旋转一周形成的立体，这里

$$g(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant \frac{9}{2}\\ x-\frac{9}{2}, & \frac{9}{2}<x\leqslant 5\end{cases}\quad (\text{单位：cm})$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}<x\leqslant \frac{7}{2}\\ \frac{1}{4}\left[1+\left(x-\frac{7}{2}\right)^2\right], & \frac{7}{2}<x\leqslant \frac{9}{2}\\ \frac{1}{2}, & \frac{9}{2}<x\leqslant 5\end{cases}$$

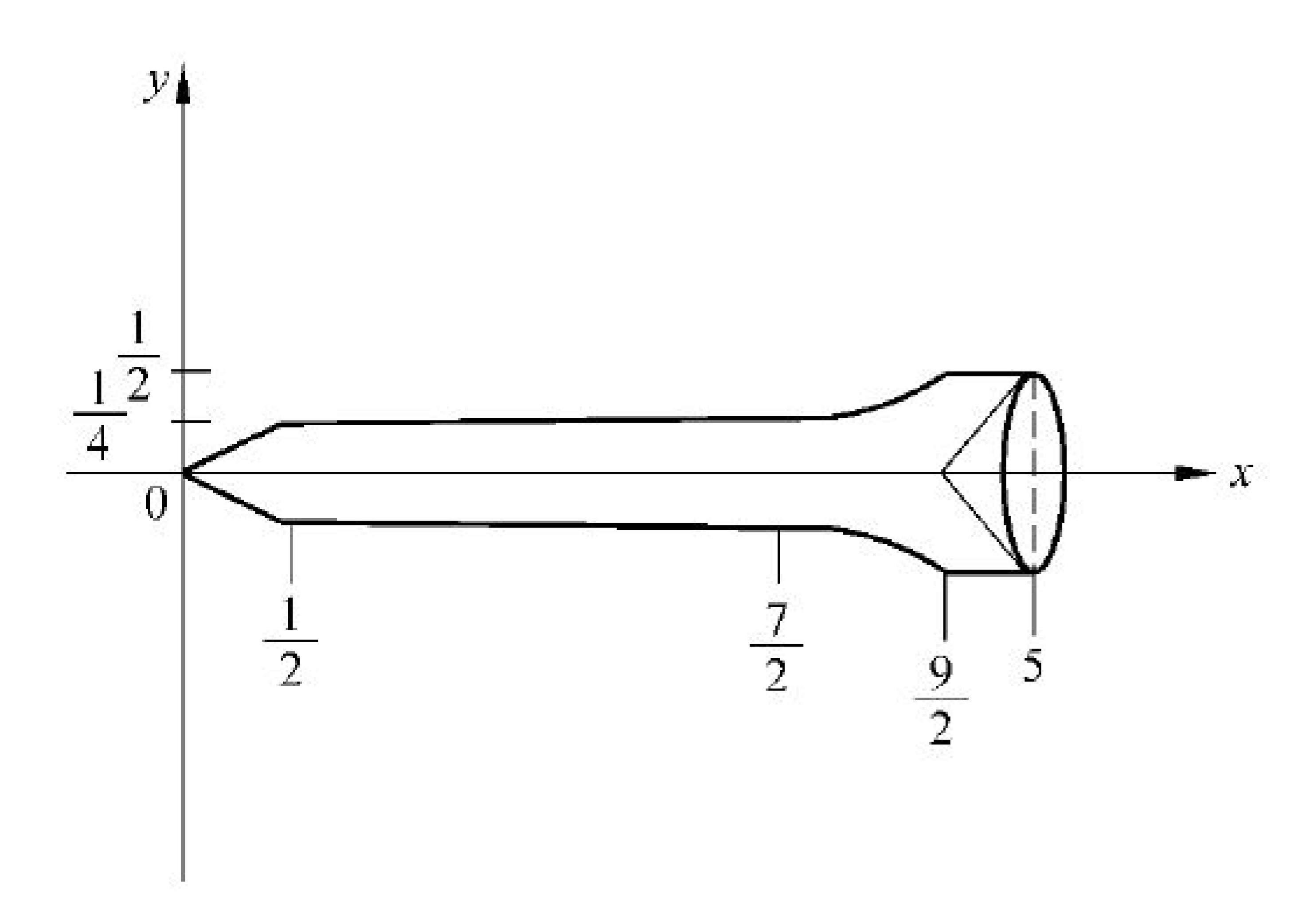


图 5-18

问这个高尔夫球座的体积是多少？

解：$V=\int_0^5 \pi f^2(x)\mathrm{d}x-\int_0^5 \pi g^2(x)\mathrm{d}x$

$$=\pi\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{1}{16}\left[1+\left(x-\frac{7}{2}\right)^2\right]^2\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{9}{2}}^{5}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\right]-\pi\int_{\frac{9}{2}}^{5}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{191}{480}\pi(\mathrm{cm}^3)$$

应用 4 【血液的流量】将人体血管看成一个圆柱形管子，它的圆截面半径为 R，管中的血流平行于血管的中心轴，距中心轴 r 处血液的流速为

$$v(r)=\frac{P_1-P_2}{4\eta l}(R^2-r^2) \tag{1}$$

其中，η 为血液的黏滞系数；P_1 和 P_2 为血管左右两端的血压（$P_1>P_2$）。试求单位时间血管中的血流量。

解：将血管的圆截面分成多个圆环，圆环的厚度为 $\mathrm{d}r$，如图 5-19 所示。则小环面积近似为 $2\pi r\mathrm{d}r$，单位时间内通过该圆环的流量为

$$\mathrm{d}Q=v(r)2\pi r\mathrm{d}r$$

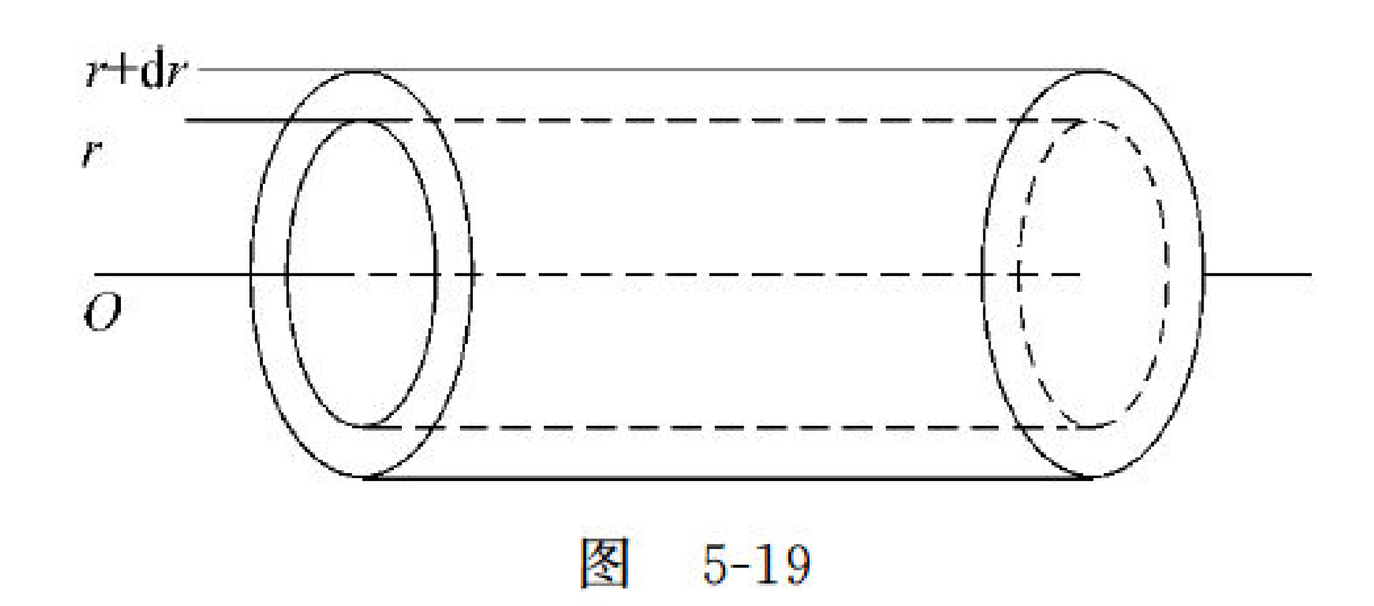


图　5-19

于是单位时间内通过半径为 R 圆截面的流量为

$$Q=\int_0^R v(r)2\pi r\mathrm{d}r$$

由(1)式得

$$\begin{aligned}Q&=2\pi\frac{P_1-P_2}{4\eta l}\int_0^R(R^2-r^2)r\mathrm{d}r\\&=\pi\frac{P_1-P_2}{2\eta l}\left(\frac{R^2}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\bigg|_0^R\\&=\frac{\pi(P_1-P_2)}{8\eta l}R^4(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})\end{aligned}$$

此时的血流量 Q，实际上也可视为曲线 $v(r)$ 绕血管中心轴旋转构成旋转体的体积，该旋转体的体积等于单位时间通过半径为 R 的血管的血流量。

$$v(r)=k(R^2-r^2)$$

其中，$k=\frac{P_1-P_2}{4\eta l}$，从而 $r^2=R^2-\frac{v}{k}$（$v\in[0,kR^2]$）。

于是，旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{kR^2}\pi r^2\mathrm{d}v=\int_0^{kR^2}\pi\left(R^2-\frac{v}{k}\right)\mathrm{d}v=\frac{k\pi}{2}R^4\\&=\frac{\pi(P_1-P_2)}{8\eta l}R^4(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})=Q\end{aligned}$$

应用 5　【机器猫】儿童玩具机器猫的横断面截线方程是 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$，求截线在 $[1,\mathrm{e}]$之间的长度。

解：由于 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$，且 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$。有

$$y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

故弧长微元为

$$dS = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$$

从而所求弧长为

$$S = \int_1^e \sqrt{1+y'^2}dx = \int_1^e \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\bigg|_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

应用 6 【弹簧做功】已知一弹簧拉长 0.02m 要用 9.8N 的力，求把该弹簧拉长 0.1m 所做的功。

解：由物理学中的胡克定理可知，在弹性限度内拉伸弹簧所需要的力与弹簧的伸长量 x 成正比，即

$$F = kx$$

其中，k 为比例系数，如图 5-20 所示。

图 5-20

根据题意，当 $x=0.02$m 时，$F=9.8$N，所以 $k=4.9\times10^2$，即

$$F = 4.9\times10^2 x$$

设弹簧沿着 x 轴方向拉伸，则 x 的变化范围为[0,0.1]，在[0,0.1]上任取一微区间$[x,x+dx]$，与该微区间对应的 F 可近似地看成常力，因此在此微区间上力 F 所做功 W 的微元为

$$dW = 4.9\times10^2 x dx$$

于是弹簧拉长 0.1m 所做的功为

$$W = \int_0^{0.1} 4.9\times10^2 x dx = 4.9\times10^2\left[\frac{x^2}{2}\right]\bigg|_0^1 = 2.45(\text{J})$$

应用 7 【活塞气体做功】在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体，在等温条件下，由于气体的膨胀，把容器中的活塞沿圆柱体中心轴由点 a 处推移到点 b 处，计算在移动过程中气体压力所做的功。

解：如图 5-21 所示，活塞的位置可用坐标 x 来表示，由物理学可知，定量气体在等温状态下，压强 p 与体积 V 成反比，即 $pV=k$(k 为常数)，而容器内气体体积为 $V=xS$，所以

$$p = \frac{k}{xS}$$

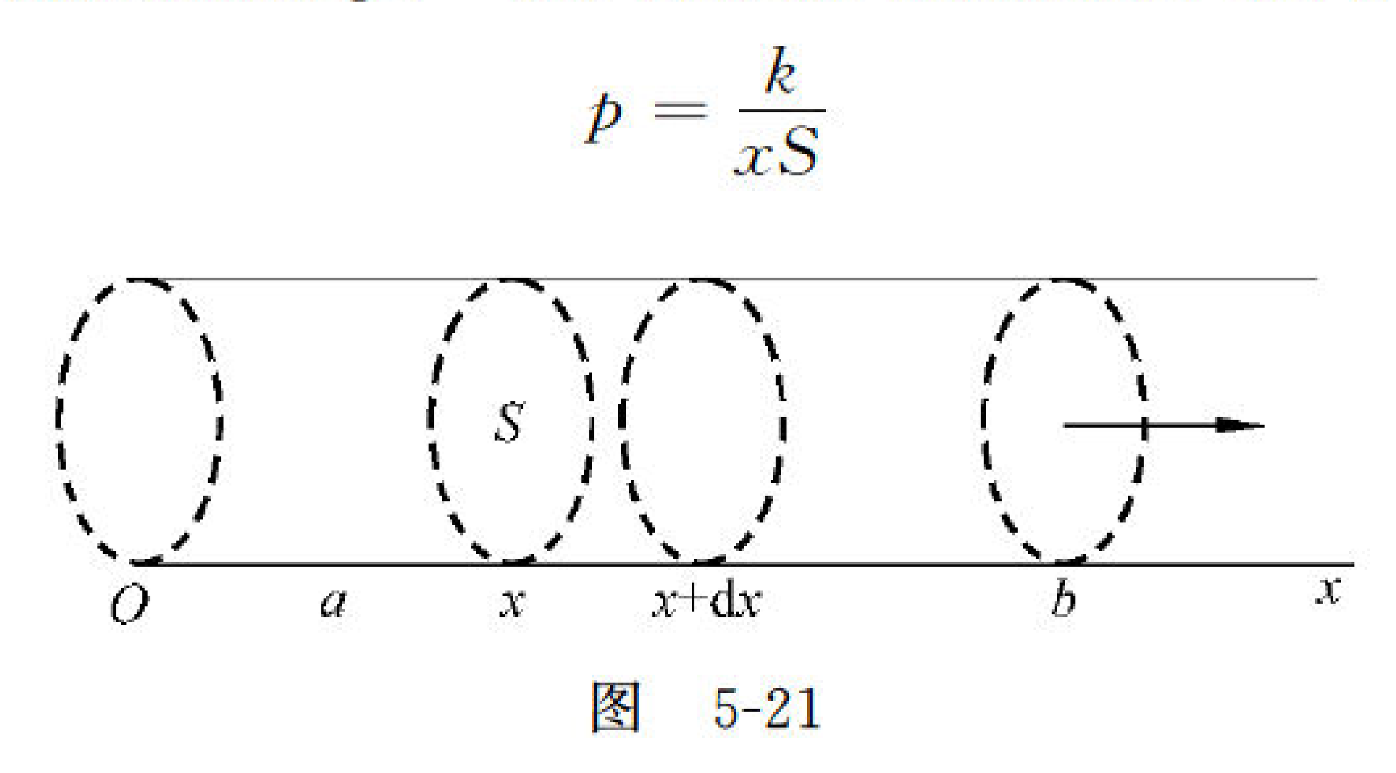


图 5-21

于是，作用在活塞上的力

$$F = pS = \frac{k}{xS}\cdot S = \frac{k}{x}$$

即 F 是随着 x 变化的力，x 的变化范围为$[a,b]$，任取在$[a,b]$上的微区间$[x,x+dx]$，当活塞由 x 移动到 $x+dx$，F 所做的功近似于$\frac{k}{x}dx$，即所求的功 W 的微元为

$$\mathrm{d}W = \frac{k}{x}\mathrm{d}x$$

于是　$W = \int_a^b \frac{k}{x}\mathrm{d}x = k[\ln x]\Big|_a^b = k\ln\frac{b}{a}$

应用 8　【薄板的压力】一长轴为 2m、短轴为 1m 的椭圆形薄板，短轴与水面相齐地将一半垂直置于水中(见图 5-22)，求此薄板一侧所受的水压力。

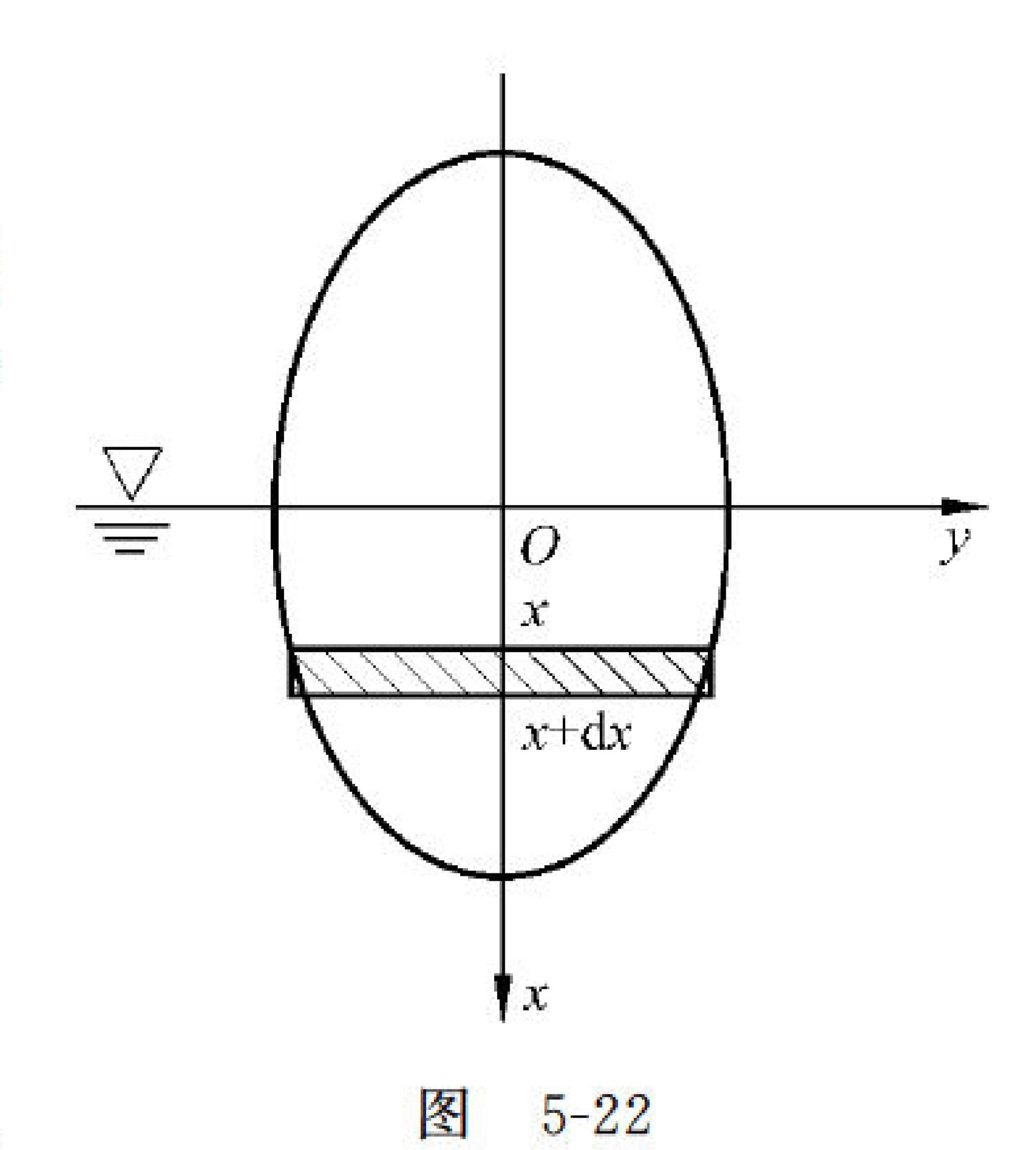


图　5-22

解：建立坐标系如图 5-22 所示，椭圆方程为

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

即
$$y=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

取 x 积分变量，$x\in[0,1]$，在$[0,1]$上任取微区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，微区间上的压力为

$$\mathrm{d}F = \rho g x \cdot 2y \cdot \mathrm{d}x = 9.8\times10^3 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

于是，所求压力为

$$\begin{aligned}F &= \int_0^1 9.8\times10^3 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \\ &= 9.8\times10^3\int_0^1\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2) \\ &= 9.8\times10^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1 \\ &\approx 3.27\times10^3(\mathrm{N})\end{aligned}$$

实践模块 5.3

A 组(基础训练)

1. 求由下列曲线所围成平面图形的面积。

(1) $y=x^3, y=x$

(2) $y=\frac{1}{x}, y=2x, x=4$

(3) $y^2=2-x, y=x$

(4) $y=x^2, y=x, y=2x$

(5) $y=\ln x, y=\ln 2, y=\ln 7, x=0$

2. 求下列曲线所围成的图形绕指定轴旋转所得的旋转体的体积。

(1) $y=x^2, y^2=x$ 绕 x 轴旋转

(2) $y=x^2, y=2x^2, y=1$ 绕 y 轴旋转

(3) $2x-y+4=0, x=0, y=0$ 绕 x 轴旋转

(4) $y=x^2-4, y=0$ 绕 x 轴旋转

B 组(能力提高训练)

1.**【窗户的面积】**一窗户外形为由抛物线 $y=3-3x^2$ 与 x 轴所围成的图形,求它的面积。

2.**【游泳池的表面面积】**一个工程师正用 CAD(computer-assisted design,计算机辅助设计)设计一游泳池,游泳池的表面是由曲线 $y=\dfrac{800x}{(x^2+10)^2}$、$y=0.5x^2-4x$ 和 $x=8$ 围成的图形,求此游泳池的表面面积。

本 章 小 结

1. 主要内容

定积分的概念与性质;定积分的换元积分法与分部积分法;牛顿-莱布尼茨公式;定积分的应用。

2. 方法要点

理解和掌握定积分概念的关键是掌握定积分的基本思想方法,即"分割、取近似、求和、取极限"四个步骤。微元法是这一思想方法在应用中的归纳和化简,是解决非常广泛的一类量的计算问题的常用方法,许多实际问题都可归结为定积分的计算问题。因此,定积分的计算是本章的重要组成部分之一。

牛顿-莱布尼茨公式把不定积分和定积分有机地结合在一起,使定积分的计算转化为求被积函数的原函数在积分区间的增量,从而大大简化了定积分的计算。

(1) 定积分是特定结构的和式的极限,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$$

其中,ε_i 介于 x_i 与 $x_i+\Delta x_i$ 之间;$\lambda=\max\{\Delta x_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$。因此,定积分的值是一个常数,它依赖于被积函数 $f(x)$和积分区间$[a,b]$,而与积分变量无关,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

(2) 牛顿-莱布尼茨公式

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且 $F(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

(3) 换元积分法与分部积分法

定积分的换元积分法与分部积分法和不定积分法解题思路相同,但有两点值得注意,即换元同时必换积分限,在求出原函数后须代回原积分变量。另外,奇偶函数在关于原点对称区间上的积分的结果很重要,应该牢固掌握。

(4) 定积分的应用

应用微元法解决问题的一般步骤是:

① 建立坐标系。
② 取典型区间$[x,x+\mathrm{d}x]$。
③ 在典型区间上求出所求量的微元表达式。
④ 写出所求量的定积分表达式,并进行计算。

阅读材料 5　多才多艺的莱布尼茨

戈特弗里德·威廉·凡·莱布尼茨(Gottfried Wilhelm von Leibniz,1646 年 7 月 1 日至 1716年 11 月 14 日)德国最重要的自然科学家、数学家、物理学家、历史学家和哲学家,一位举世罕见的科学天才,和牛顿同为微积分的创建人。他的研究成果还遍及力学、逻辑学、化学、地理学、解剖学、动物学、植物学、气体学、航海学、地质学、语言学、法学、哲学、历史、外交等,“世界上没有两片完全相同的树叶”就是出自他之口。他还是最早研究中国文化和中国哲学的德国人,对丰富人类的科学知识宝库做出了不可磨灭的贡献。

1. 生平事迹

莱布尼茨出生于德意志联邦共和国东部莱比锡的一个书香之家,父亲是莱比锡大学的道德哲学教授,母亲出生在一个知识分子家庭。莱布尼茨的父亲在他年仅 6 岁时便去世了,给他留下了丰富的藏书。莱布尼茨因此得以广泛接触古希腊罗马文化,阅读了许多著名学者的著作,由此而获得了坚实的文化功底和明确的学术目标。15 岁时,他进了莱比锡大学学习法律,一进校便跟上了大学二年级标准的人文学科的课程,还广泛阅读了培根、开普勒、伽利略等人的著作,并对他们的著述进行深入的思考和评价。在听了教授讲授欧几里得的《几何原本》的课程后,莱布尼茨对数学产生了浓厚的兴趣。17 岁时他在耶拿大学学习了短时期的数学,并获得了哲学硕士学位。

20 岁时,莱布尼茨转入阿尔特道夫大学。这一年,他发表了第一篇数学论文《论组合的艺术》。这是一篇关于数理逻辑的文章,其基本思想是出于想把理论的真理性论证归结于一种计算的结果。这篇论文虽不够成熟,但却闪耀着创新的智慧和数学才华。

莱布尼茨在阿尔特道夫大学获得博士学位后便投身外交界。从 1671 年开始,他利用外交活动开拓了与外界的广泛联系,尤以通信作为他获取外界信息、与人进行思想交流的主要方式。在出访巴黎时,莱布尼茨深受帕斯卡事迹的鼓舞,决心钻研高等数学,并研究了笛卡儿、费尔马、帕斯卡等人的著作。1673 年,莱布尼茨被推荐为英国皇家学会会员。此时,他的兴趣已明显地朝向了数学和自然科学,开始了对无穷小算法的研究,独立地创立了微积分的基本概念与算法,和牛顿共同奠定了微积分学。1676 年,他到汉诺威公爵府担任法律顾问兼图书馆馆长。1700 年被选为巴黎科学院院士,促成建立了柏林科学院并任首任院长。

1716 年 11 月 14 日,莱布尼茨在汉诺威逝世,终年 70 岁。

2. 始创微积分

17 世纪下半叶,欧洲科学技术迅猛发展,由于生产力的提高和社会各方面的迫切需要,经各国科学家的努力与历史的积累,建立在函数与极限概念基础上的微积分理论应运

而生了。微积分思想，最早可以追溯到希腊由阿基米德等人提出的计算面积和体积的方法。1665 年牛顿创始了微积分，莱布尼茨在 1673—1676 年也发表了微积分思想的论著。以前，微分和积分作为两种数学运算、两类数学问题，是分别加以研究的。卡瓦列里、巴罗、沃利斯等人得到了一系列求面积(积分)、求切线斜率(导数)的重要结果，但这些结果都是孤立的，不连贯的。只有莱布尼茨和牛顿将积分和微分真正沟通起来，明确地找到了两者内在的直接联系：微分和积分是互逆的两种运算，这是微积分建立的关键所在。关于微积分的优先权，世界公认的是牛顿和莱布尼茨各自独立发现了微积分基本原理，所以二者在微积分上的贡献是齐名的。

3. 高等数学上的众多成就

此外，在数学方面，莱布尼茨曾讨论过负数和复数的性质，得出复数的对数并不存在、共轭复数的和是实数的结论。在后来的研究中，莱布尼茨证明了自己的结论是正确的。他还对线性方程组进行研究，对消元法从理论上进行了探讨，并首先引入了行列式的概念，提出行列式的某些理论。他还创立了符号逻辑学的基本概念，发明了能够进行加、减、乘、除及开方运算的计算机和二进制，为计算机的现代发展奠定了坚实的基础。

4. 丰硕的物理成果

莱布尼茨的物理学成就也是非凡的。他发表了《物理学新假说》，提出了具体运动原理和抽象运动原理，认为运动着的物体，不论多么渺小，它将带着处于完全静止状态的物体的部分一起运动。他还对笛卡儿提出的动量守恒原理进行了认真的探讨，提出了能量守恒原理的雏形，并在《教师学报》上发表了“关于笛卡儿和其他人在自然定律方面的显著错误的简短证明”，提出了运动的量的问题，证明了动量不能作为运动的度量单位，并引入动能概念，第一次认为动能守恒是一个普通的物理原理。他又充分地证明了“永动机是不可能”的观点。他也反对牛顿的绝对时空观，认为“没有物质也就没有空间，空间本身不是绝对的实在性”，“空间和物质的区别就像时间和运动的区别一样，可是这些东西虽有区别，却是不可分离的”。在光学方面，莱布尼茨也有所建树，他利用微积分中的求极值方法，推导出了折射定律，并尝试用求极值的方法解释光学基本定律。可以说莱布尼茨的物理学研究一直是朝着为物理学建立一个类似欧氏几何的公理系统的目标前进的。

5. 中西文化交流之倡导者

莱布尼茨对中国的科学、文化和哲学思想十分关注，他是最早研究中国文化和中国哲学的德国人。他向耶稣会来华传教士格里马尔迪了解到了许多有关中国的情况，包括养蚕纺织、造纸印染、冶金矿产、天文地理、数学文字等，并将这些资料编辑成册出版。他认为中西相互之间应建立一种交流认识的新型关系。在《中国近况》一书的绪论中，莱布尼茨写道：“全人类最伟大的文化和最发达的文明仿佛今天汇集在我们大陆的两端，即汇集在欧洲和位于地球另一端的东方的欧洲——中国。”“中国这一文明古国与欧洲相比，面积相当，但人口数量则已超过”。“在日常生活以及经验地应付自然的技能方面，我们是不分伯仲的。我们双方各自都具备通过相互交流使对方受益的技能。在思考的缜密和理性的思辨方面，显然我们要略胜一筹”，但“在时间哲学，即在生活与人类实际方面的伦理以及治国学说方面，我们实在是相形见绌了”。在这里，莱布尼茨不仅显示出了不带“欧洲中心

论”色彩的虚心好学精神，而且为中西文化双向交流描绘了宏伟的蓝图，极力推动这种交流向纵深发展，使东西方人民相互学习，取长补短，共同繁荣进步。

莱布尼茨为促进中西文化交流做出了毕生的努力，产生了广泛而深远的影响。他的虚心好学、对中国文化平等相待，不含“欧洲中心论”偏见的精神尤为难能可贵，值得后世永远敬仰、效仿。

综合训练 5

1. 填空题。

(1) 若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ ________。

(2) 若 $a<b<c$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x +$ ________。

(3) 若 $\int_0^a x^2\mathrm{d}x = 9$，则 $a =$ ________。

(4) $\int_0^4 \mathrm{d}x =$ ________。

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0\\ 1, & x<0\end{cases}$，则 $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x =$ ________。

(6) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2\sin x\mathrm{d}x =$ ________。

2. 选择题。

(1) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是(　　)。

A. $f(x)$的一个原函数　　B. 任意常数

C. $f(x)$的全体原函数　　D. 确定常数

(2) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值取决于(　　)。

A. 积分区间$[a,b]$与积分变量 x　　B. 被积函数 $f(x)$与积分区间$[a,b]$

C. 被积函数 $f(x)$　　D. 积分上限 b 与积分下限 a

(3) 已知 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$，$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$，则$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x =$ (　　)。

A. 8　　B. -8　　C. 2　　D. -2

(4) 下列积分中可以使用牛顿-莱布尼茨公式的是(　　)。

A. $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　B. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$　　C. $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$　　D. $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

(5) 若 $\int_0^1 \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$，则结果正确的是(　　)。

A. $a=0,b=1$　　B. $a=0,b=\mathrm{e}$　　C. $a=1,b=10$　　D. $a=1,b=\mathrm{e}$

3. 计算下列定积分。

(1) $\int_3^4 \frac{x^2+x-6}{x-2}\mathrm{d}x$　　(2) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$

(6) $\int_0^1 \frac{x+\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(7) $\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin 2x\mathrm{d}x$

(9) $\int_0^{\pi} x^2\cos x\mathrm{d}x$

(10) $\int_1^{\mathrm{e}} x^3\ln x\mathrm{d}x$

(11) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

(12) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$

4. 求由曲线 $y=x^3$ 及 $y=\sqrt{x}$所围成图形的面积。

5. 求由曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 和该曲线过原点的切线及 y 轴所围成的图形的面积。

6. 求由 $y^2=x$ 和 $x=2$ 绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积。

附录
参考答案

实践模块 1.1

A 组(基础训练)

1. (1) $\left[-\frac{3}{4},+\infty\right)$　　(2) $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

2. (1) $y=u^3,u=1-x$　　(2) $y=e^u,u=x+1$

   (3) $y=u^2,u=\cos v,v=3x+1$　　(4) $y=\ln u,u=\sqrt{v},v=x+1$

   (5) $y=\sqrt{u},u=x+5$　　(6) $y=\tan u,u=\sqrt{v},v=2x-1$

B 组(能力提高训练)

1. $f(5)=2,f(-2)=4$

2. (1) $(-1,1)$

   (2) $[-1,2]$

   (3) $[-1,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

   (4) $(1,+\infty)$

3. (1) $y=\arcsin u,u=\sqrt{v},v=\cos x$

   (2) $y=u^3,u=\tan v,v=e^m,m=3x$

实践模块 1.2

A 组(基础训练)

1. (1) A　　(2) $\frac{\pi}{2}$　　(3) 1,0　　(4) -3

2. (1) 0　　(2) 0　　(3) 0　　(4) 2　　(5) 0　　(6) 1

3. 不存在

B 组(能力提高训练)

1. 极限存在且为 2

2. (1) 无穷大　(2) 无穷小　(3) 无穷大　(4) 无穷大　(5) 无穷小　(6) 无穷小

实践模块 1.3

A 组(基础训练)

(1) 1　(2) $-\frac{2}{3}$　(3) 4　(4) $\frac{1}{6}$　(5) 3　(6) 0　(7) 5

(8) $\frac{3}{2}$　(9) e^{-6}　(10) e^{-2}

B 组(能力提高训练)

1. (1) 同阶无穷小　(2) 高阶无穷小　(3) 同阶无穷小　(4) 等价无穷小
2. (1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{5}{7}$　(3) $\frac{2}{9}$
3. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $\frac{1}{2}$　(3) ∞　(4) 2　(5) 0　(6) $\frac{1}{2}$　(7) -6

   (8) e

实践模块 1.4

A 组(基础训练)

1. (1) $f(x_0)$

   (2) $x_1=-1, x_2=4$; $(-\infty,-1)\cup(-1,4)\cup(4,+\infty)$

   (3) 4
2. (1) B　(2) C

B 组(能力提高训练)

1. (1) 连续　(2) 间断　(3) 间断　(4) 间断　(5) 连续
2. $a=-1$
3. ~5. (略)

综合实训 1

1. (1) $\frac{4}{3}$　(2) 2　(3) 同阶　(4) $\frac{3}{2}$　(5) $x=0$　(6) 0
2. (1) B　(2) D　(3) D　(4) A　(5) B
3. (1) $\frac{4}{3}$　(2) $\frac{3}{10}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) -1　(5) 3　(6) $\frac{1}{3}$

   (7) $\frac{1}{2}$　(8) 9　(9) e^{-9}　(10) e^{-1}

4. 不连续
5. （略）
6. 5348.48 元；5349.11 元
7. （略）

实践模块 2.1

A 组（基础训练）

1. （1）1　（2）$-\frac{1}{x^2}$　（3）$\frac{1}{2\sqrt{x}}$　（4）$-\frac{2}{x^3}$

（5）$-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$　（6）$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$　（7）$10^x\ln 10$　（8）$\frac{1}{x\ln 2}$

2. （1）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　（2）-2　（3）$\frac{1}{3}$　（4）e^2

（5）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　（6）$\frac{1}{4}$

3. 切线方程 $ey-x=0$；法线方程 $y+ex-e^2-1=0$

B 组（能力提高训练）

1. （1）$\left(2,\frac{3}{2}\right)$和$\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$　（2）2
2. （1）D　（2）B　（3）C　（4）B
3. （1）$-f'(x_0)$　（2）$2f'(x_0)$　（3）$\frac{1}{2}f'(x_0)$　（4）$f'(0)$
4. $3\sqrt{3}x+6y-3-\sqrt{3}\pi=0$，$12\sqrt{3}x-18y+9-4\sqrt{3}\pi=0$
5. 连续不可导

实践模块 2.2

A 组（基础训练）

1. （1）$6x^2-6x$　（2）$\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}$　（3）$\ln x+1$　（4）$\frac{1-2x\arctan x}{(1+x^2)^2}$
2. （1）$-3\sin 3x$　（2）$2xe^{x^2}$　（3）$\frac{3\ln^2 x}{x}$　（4）$2^{\sin x}\cos x\ln 2$

（5）$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　（6）$\frac{2}{(2x-1)\ln a}$　（7）$\frac{2x}{1+x^2}$　（8）$\frac{1}{x\ln x}$

（9）$\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$　（10）$-6\sin^2(1-2x)\cos(1-2x)$

3. (1) $\frac{1-x}{y}$ (2) 0

4. (1) $-\sin x-\cos x$ (2) $4e^{2x}$ (3) $(2+x)e^x$ (4) $\frac{2x}{1+x^2}+2\arctan x$

B组(能力提高训练)

1. (1) $2e^x\cos x$ (2) $\frac{1}{1-\sin x}$

2. (1) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $\frac{2x}{x^4+2x^2+2}$ (3) $\cos^2 x(\cos^2 x-3\sin^2 x)$

   (4) $-\frac{\sqrt{2x}}{2x}\tan\sqrt{2x}$ (5) $\frac{\cos x}{|\cos x|}=\begin{cases}1, & x\text{ 在第一、四象限}\\ -1, & x\text{ 在第二、三象限}\end{cases}$

   (6) $2\cos 2x+2x\cos x^2$

3. (1) $-\frac{x^2+2y}{2x+5y^2}$ (2) $\frac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)}$

4. $y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\cot x)$

5. $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$

实践模块 2.3

A 组(基础训练)

1. (1) $2x$ (2) $\frac{3}{2}x^2$ (3) $\sin t$ (4) $\ln x$

2. (1) $(x^6+\sin x+3^x\ln 3)dx$ (2) $(1-x+x^2-x^3)dx$

   (3) $\frac{\sqrt{x}}{x}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)dx$ (4) $\ln x dx$

   (5) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx$ (6) $2e^{\sin 2x}\cos 2x dx$

B 组(能力提高训练)

1. (1) $(a+2bx)e^{ax+bx^2}dx$ (2) $(a\cos ax\cos bx-b\sin ax\sin bx)dx$

   (3) $\frac{2}{\sin 2x}dx$ (4) $-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1\\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0\end{cases}$

2. 10.03

3. $0.04\pi R^2$

综合实训 2

1. (1) C　(2) D　(3) C　(4) C　(5) B　(6) B　(7) C　(8) D

2. (1) π^2　(2) $-\frac{1}{4}$　(3) 4,2　(4) 24　(5) $(x-2)e^{-x}$　(6) $f'(u)\varphi'(x)dx$

3. (1) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$　(2) $\frac{x(45x^2+16)}{\sqrt{1+5x^2}}$

(3) $\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{(x\cos a-\sin a)^2}$　(4) $-\cot^3 x$

(5) $2^x(x\sin x\ln 2+\cos x\ln 2+x\cos x)$　(6) $\sec x$

4. (1) $y''=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$　(2) $y''=-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(3) $y''=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$　(4) $y''=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$

5. $\left(\frac{5}{2},\frac{19}{16}\right)$,$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{16}\right)$

6. $30m^3$

实践模块 3.1

A 组(基础训练)

(1) 1　(2) 2　(3) $\cos a$　(4) -2

B 组(能力提高训练)

(1) 1　(2) 2　(3) 0　(4) 1　(5) 1

(6) 0　(7) 0　(8) 0　(9) 1　(10) 1

实践模块 3.2

A 组(基础训练)

1. (1) $(-1,0)\cup(0,1)$　(2) $(-\infty,+\infty)$

2. (1) $(-\infty,+\infty)$递增　(2) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$递增,$(-2,1)$递减

(3) $(-\infty,+\infty)$递减　(4) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$递增,$(-2,0)\cup(0,2)$递减

B 组(能力提高训练)

1. (1) $(0,e)$递增,$(e,+\infty)$递减　(2) $(-\infty,+\infty)$递增

2. (1) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$为凹区间,$(1,2)$为凸区间,$(1,-3)$和$(2.6)$为拐点

(2) $(0,+\infty)$为凹区间,无拐点

(3) $(-\infty,-2)$为凸区间,$(-2,+\infty)$为凹区间,$\left(-2,\frac{-2}{e^2}\right)$为拐点

(4) $(-1,1)$为凹区间,$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$为凸区间,$(1,\ln 2)$、$(-1,\ln 2)$为拐点

3. $a=2,b=3$

实践模块 3.3

A 组(基础训练)

1. (1) $f(1)_{极小}=-1$

(2) $f(-1)_{极小}=-19,f(1)_{极大}=13,f(2)_{极小}=8$

(3) $f(0)_{极小}=0$

(4) $f(0)_{极大}=0,f(1)_{极小}=-\frac{9}{8}$

2. $f(1)_{最大}=\frac{11}{6},f(-1)_{最小}=-\frac{41}{6}$

B 组(能力提高训练)

1. $a=-\frac{2}{3},b=-\frac{1}{6}$

2. 底边 10m,高 5m

3. $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$台

4. 距离炼油厂$(10-\sqrt{5})$km 处

综合实训 3

1. (1) C (2) C (3) A (4) B (5) C

2. (1) $(-\infty,+\infty)$ (2) $p=1$ (3) $\frac{7}{9},\frac{0}{0}$ (4) $e^2,0$

3. (1) $\frac{m}{n}a^{m-n}$ (2) $-\frac{3}{5}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) 1

4. $(0,1)\cup(1,+\infty)$为单调增加区间,$(-\infty,0)$为单调减少区间,$f(0)_{极小}=0$

5. $a=2,f\left(\frac{\pi}{3}\right)_{极大}=\sqrt{3}$

6. 正面长为 10m,侧面宽为 15m

7. $x=100$m,5880 元

实践模块 4.1

A 组(基础训练)

1. (1) $\frac{1}{3}x^3+C$　(2) $\cos x$　(3) $f(x)+C$　(4) $\arctan x\mathrm{d}x$

   (5) $\ln x+C$

2. $y=x^3+1$

3. $s=\frac{3}{2}t^2-2t+5$

B 组(能力提高训练)

1. (1) $12x^2$　(2) $4x^3+C$　(3) $\sin 2x$　(4) $\ln x$

2. $y=x^3-3x+2$

实践模块 4.2

A 组(基础训练)

1. (1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{1}{2}$　(3) -1　(4) $\frac{1}{3}$

2. (1) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$　(2) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$

   (3) $2e^x+3\ln|x|+C$　(4) $3\arctan x-2\arcsin x+C$

3. (1) $\frac{1}{5}e^{5x}+C$　(2) $-\frac{1}{8}(3-2x)^4+C$

   (3) $\frac{1}{3}(\arctan x)^3+C$　(4) $\frac{1}{3}\ln^3 x+C$

B 组(能力提高训练)

1. (1) 2　(2) $\frac{1}{2}$　(3) $-\frac{1}{2}$　(4) $\frac{1}{3}$

   (5) $\frac{1}{3}$　(6) $\frac{1}{2}$

2. (1) $2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$　(2) $x^3+\arctan x+C$

   (3) $2x-\frac{5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 2-\ln 3}+C$　(4) $\tan x-\sec x+C$

   (5) $\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$　(6) $-\cot x-\tan x+C$

3. (1) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$　(2) $-\frac{1}{\sin x}+C$

(3) $-e^{\frac{1}{x}}+C$　(4) $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$

(5) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$　(6) $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$

(7) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$　(8) $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$

(9) $\frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+C$　(10) $\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$

(11) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+3\ln|1+\sqrt[3]{x}|+C$　(12) $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$

(13) $\frac{1}{2}\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}+C$　(14) $\ln|\sqrt{1+x^2}+x|+C$

(15) $\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}+C$　(16) $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C$

4. (1) $-x\cos x+\sin x+C$　(2) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$

(3) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$　(4) $-e^x(x+1)+C$

(5) $-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$　(6) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$

综合实训 4

1. (1) $y=x^3-4$　(2) $-\cos x+C_1x+C_2$　(3) $3e^{3x}$　(4) $\frac{x^2}{2}+C$

(5) $x-\frac{1}{3}x^3+C$　(6) $\arctan f(x)+C$

2. (1) C　(2) C　(3) B　(4) D　(5) B

3. (1) $\frac{2^{2x}}{2\ln 2}+\frac{2}{\ln 6}6^x+\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$　(2) $-2\cos\sqrt{x}+C$

(3) $\frac{1}{4}\ln|3+4\sin x|+C$　(4) $\arctan e^x+C$

(5) $2\sqrt{e^x+1}+C$　(6) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$

(7) $-\frac{1}{3}\cos^2 x+C$　(8) $\frac{1}{3}x^3-x+2\arctan x+C$

(9) $2\sqrt{x+1}-2\ln(1+\sqrt{x+1})+C$　(10) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$

(11) $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$　(12) $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$

(13) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$　(14) $2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})+C$

4. (1) $s=\frac{2}{3}t^3$　(2) $i=2t^2-0.2t^3+2$　(3) $v=\frac{10}{1+2t}+\frac{97}{10}$

实践模块 5.1

A 组(基础训练)

1. (1) $b-a,\int_a^b \mathrm{d}x$　(2) $\int_0^3 (2t+1)\mathrm{d}t$　(3) 3, −2, [−2, 3]　(4) 0

2. (1) 20　(2) 2π

B 组(能力提高训练)

1. (1) $<$　(2) $>$　(3) $>$　(4) $<$

2. (1) $0\leqslant\int_1^e \ln x\mathrm{d}x\leqslant e-1$　(2) $1\leqslant\int_1^2 x^3\mathrm{d}x\leqslant 8$

3. (1) $\frac{5}{2}$　(2) $\frac{2+\pi}{4}$

4. (1) $\int_0^{\sqrt{2}}(2x-x^2)\mathrm{d}x$　(2) $\int_0^1(e-e^x)\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x$　(4) $\int_0^1(e^x-e^{-x})\mathrm{d}x$

实践模块 5.2

A 组(基础训练)

1. (1) $2(\sqrt{3}-1)$　(2) ln2　(3) $e-1$　(4) $\frac{\pi}{2}$

2. (1) $4-2\arctan x$　(2) $2(\sqrt{3}-1)$

3. (1) $1-\frac{2}{e}$　(2) $\frac{1+e^2}{4}$

B 组(能力提高训练)

1. (1) $1-\frac{\pi}{4}$　(2) $\frac{\pi}{3}$

(3) $\frac{21}{8}$　(4) $1+\frac{\pi}{4}$

2. (1) $2-\frac{\pi}{2}$　(2) $\arctan e-\frac{\pi}{4}$

(3) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$　(4) $1-e^{-\frac{1}{2}}$

3. (1) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$　(2) $\frac{\pi}{2}-1$

(3) $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$　　(4) $2-\frac{2}{e}$

实践模块 5.3

A 组(基础训练)

1. (1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{31}{2}-\frac{5}{2}\ln 2$　(3) $\frac{9}{2}$　(4) $\frac{7}{6}$　(5) 5

2. (1) $\frac{3}{10}\pi$　(2) $\frac{\pi}{4}$　(3) $\frac{32\pi}{3}$　(4) $\frac{512}{15}\pi$

B 组(能力提高训练)

1. $S=4$
2. 77.26

综合实训 5

1. (1) 0　(2) $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$　(3) 3　(4) 4　(5) 1　(6) 0

2. (1) D　(2) B　(3) D　(4) A　(5) D

3. (1) $\frac{13}{2}$　(2) $\frac{3}{2}$　(3) $\frac{1}{3}\ln 2$　(4) $\frac{\pi}{16}$　(5) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

   (6) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi^2}{32}$　(7) $\ln\frac{2e}{1+e}$　(8) $\frac{2}{5}$　(9) -2π

   (10) $\frac{3e^4+1}{16}$　(11) $\frac{1}{2}$　(12) $\frac{\pi}{2}$

4. $\frac{5}{12}$

5. $\frac{e}{2}-1$

6. 2π

参 考 文 献

[1] 颜文勇,柯善军. 高等应用数学[M]. 北京:高等教育出版社,2008.
[2] 马刚. 微积分[M]. 长春:吉林大学出版社,2011.
[3] 谢国瑞,汪国强. 高职高专数学教程[M]. 北京:高等教育出版社,2002.